

Corrigé de l'envoi 4 — 2005/2006

Problème 1 :

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_n^2 = 4x_n \\ x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ \vdots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \end{array} \right.$$

Combien ce système admet-il de solutions (x_1, \dots, x_n) avec $x_i > 0$ pour tout i ?

Notre solution :

Considérons les indices modulo n . Ainsi le système se réécrit $x_{i+1} + x_i^2 = 4x_i, \forall i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On remarque que si $x_i > 4$, alors $x_{i+1} = x_i(4 - x_i) < 0$ et donc x_i ne peut intervenir dans une solution du système. Toute solution (x_1, \dots, x_n) est donc telle que $x_i \in]0, 4]$ pour tout i .

Soit (x_1, \dots, x_n) une solution du système. On définit $y_i = \frac{x_i - 2}{2} \in]-1, 1]$. Ceux-ci sont soumis aux relations $y_{i+1} = 1 - 2y_i^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $\theta \in]0, \pi]$ l'angle tel que $y_n = -\cos \theta$. La relation précédente fournit (avec $i = n$) :

$$y_1 = 1 - 2y_n^2 = 1 - 2\cos^2 \theta = -\cos(2\theta)$$

et par récurrence, on obtient $y_k = -\cos(2^k \theta)$. D'où on déduit $\cos \theta = \cos(2^n \theta)$. Ceci se résout en $(2^n - 1)\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ou $(2^n + 1)\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, ce qui conduit à $(2^n - 1) + (2^n + 1) = 2^{n+1}$ angles. On vérifie facilement que parmi eux, $2^n - 1$ sont dans l'intervalle $]0, \pi]$, et que ceux-ci sont deux à deux distincts (en fait seul 0 est compté deux fois, et il n'appartient pas à cet intervalle).

Chacun des angles précédents correspond à une et une seule solution du système d'origine. Il y a donc exactement $2^n - 1$ solutions.

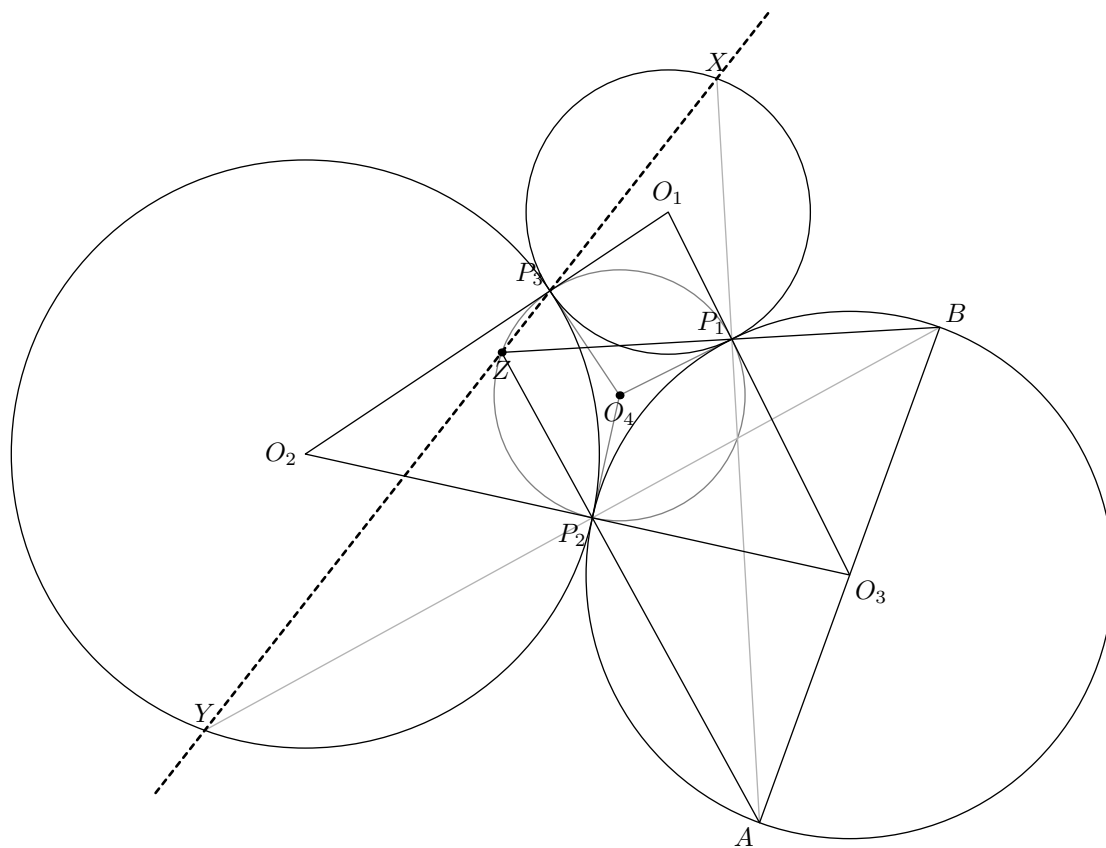
Corrigé de l'envoi 4 — 2005/2006

Problème 2 :

Dans le plan, trois cercles \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 sont deux à deux tangents extérieurement. On note P_1 (resp. P_2) le point de contact entre \mathcal{C}_1 (resp. \mathcal{C}_2) et \mathcal{C}_3 . On se donne sur \mathcal{C}_3 un diamètre $[AB]$ dont les extrémités ne sont ni P_1 ni P_2 . La droite (AP_1) intersecte à nouveau \mathcal{C}_1 en X et la droite (BP_2) intersecte à nouveau \mathcal{C}_2 en Y . Finalement les droites (AP_2) et (BP_1) se coupent en Z . Montrer que les points X , Y et Z sont alignés.

Notre solution :

Une première difficulté est d'arriver à obtenir une figure claire. Voici notre essai :



On note O_1 , O_2 et O_3 les centres des cercles, ainsi que P_3 le point de contact de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Le point O_4 obtenu comme l'intersection des tangentes aux cercles en P_1 et P_2 est équidistant de P_1 , P_2 et P_3 ; c'est donc le centre du cercle circonscrit, noté \mathcal{C}_4 , au triangle formé par ces trois points. De plus O_4 est également situé sur la tangente commune aux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Comme (O_4P_1) (resp. (O_4P_2) , resp. (O_4P_3)) est perpendiculaire à (O_1O_3) (resp. (O_2O_3) , resp. (O_1O_2)), le point O_4 est également le centre du cercle inscrit à $O_1O_2O_3$.

Comme $[AB]$ est un diamètre, on a les égalités :

$$\widehat{O_3P_2A} = \widehat{O_3AP_2} = \pi - \widehat{P_2P_1B} = \widehat{P_2P_1Z}.$$

Si Z' désigne le second point d'intersection de (P_2A) avec \mathcal{C}_4 , on a $\widehat{P_2P_1Z} = \widehat{O_3P_2A} = \pi - \widehat{O_3P_2Z'}$, d'où on déduit que Z' est sur la droite (BZ) puis que $Z = Z'$ (car ils sont tous les deux sur (AP_2)). Autrement dit le point Z est sur \mathcal{C}_4 .

Montrons que X , P_3 et Z sont alignés et pour cela comparons les angles $\widehat{ZP_3P_1}$ et $\widehat{XP_3P_1}$. Le premier vaut $\widehat{ZP_1O_3}$ grâce à la cocyclicité. Le second se calcule ainsi :

$$\widehat{ZP_3P_1} = \widehat{XP_1O_4} = \widehat{ZP_1O_3},$$

la première égalité résultant encore de la cocyclicité et la seconde du fait que les droites (ZP_1) et (P_1A) d'une part et (O_4P_1) et (P_1O_3) d'autre part sont perpendiculaires. Il s'ensuit $\widehat{ZP_3P_1} = \widehat{XP_3P_1}$ et l'alignement annoncé. On prouve de même que les points Y , P_3 et Z sont alignés, ce qui termine l'exercice.

Corrigé de l'envoi 4 — 2005/2006

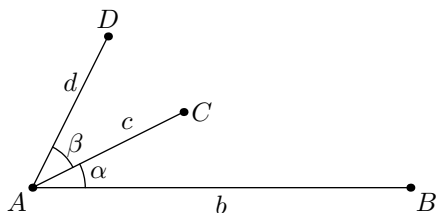
Problème 3 :

Dans le plan on se donne n points ($n \geq 4$). On suppose que la distance entre deux quelconques de ces points est un entier. Montrer qu'au moins un sixième de ces $\binom{n}{2}$ distances sont divisibles par 3.

Notre solution :

Commençons par remarquer que tout se ramène au cas $n = 4$. Supposons l'exercice résolu pour $n = 4$ et donnons-nous n points dans le plan vérifiant les conditions de l'énoncé. On sait que chaque choix de quatre points parmi les n retenus détermine au moins une distance entière. On obtient $\binom{n}{4}$ distances entières, mais bien sûr chacune d'entre elles peut-être comptée plusieurs fois. Cependant, une paire de points $\{A, B\}$ apparaît dans exactement $\binom{n-2}{2}$ quadruplets, et donc chaque distance entière est comptée au plus $\binom{n-2}{2}$ fois. Au final, on trouve au moins $\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n-2}{2}} = \frac{1}{6} \binom{n}{2}$ distances entières comme on le souhaite.

Reste donc à traiter le cas $n = 4$. Notons A, B, C et D les quatre points et supposons qu'ils se répartissent comme sur la figure ci-dessous :



On a les relations d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned}BC^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\CD^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta \\BD^2 &= b^2 + d^2 - 2bd \cos(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Elles impliquent que l'on peut écrire $\cos \alpha = \frac{x}{D}$, $\cos \beta = \frac{y}{D}$ et $\cos(\alpha + \beta) = \frac{z}{D}$ avec x, y, z entiers et $D = 2bcd$. On raisonne à présent par l'absurde en supposant qu'aucune des distances n'est multiple de 3. Alors $b^2 \equiv c^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{3}$ et par les relations précédentes, on obtient $dx \equiv by \equiv cz \equiv 1 \pmod{3}$. Il s'ensuit que x, y et z ne sont pas des multiples de 3 et donc également $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{3}$. On utilise à présent la relation qui relie les cosinus. Elle donne :

$$Dz = D^2 \cos(\alpha + \beta) = D^2 \cos \alpha \cos \beta - D^2 \sin \alpha \sin \beta = xy - D^2 \sin \alpha \sin \beta$$

d'où on déduit :

$$A^2 = D^2 \sin \alpha \sin \beta = xy - Dz = xy - 2bcdz \equiv xy + bd \pmod{3}.$$

En particulier $A^2 \equiv x^2y^2 + b^2d^2 + 2xybd \equiv 1 \pmod{3}$. Mais on a d'autre part $D^2 \sin^2 \alpha = D^2(1 - \cos^2 \alpha) = D^2(D^2 - z^2) \equiv 0 \pmod{3}$, ce qui implique $A^2 \equiv 0 \pmod{3}$ et est donc incompatible avec ce que l'on a trouvé précédemment. Ceci constitue notre contradiction et termine l'exercice.

Corrigé de l'envoi 4 — 2005/2006

Problème 4 :

Soit $x_0 \in]0, 1[$. On définit la suite (x_n) par la formule $x_{n+1} = 1 - |1 - 2x_n|$. Montrer que (x_n) est périodique à partir d'un certain rang si, et seulement si x_0 est rationnel.

Notre solution :

Commençons par exprimer les termes de la suite en fonction de x_0 . On peut le faire à l'aide du développement en base 2. On peut bien sûr supposer que $x_0 < 1$, et on écrit alors le développement en base 2 de x_0 sous la forme :

$$x_0 = 0, a_1 a_2 \dots$$

Alors $2x_0 = a_1, a_2 a_3 \dots$. Si $a_1 = 1$, il vient :

$$|1 - 2x_0| = 2x_0 - 1 = 0, a_2 a_3 \dots$$

et si à l'inverse $a_1 = 0$, on a :

$$|1 - 2x_0| = 0, \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots \quad \text{où l'on note } \bar{0} = 1 \text{ et } \bar{1} = 0$$

On obtient ainsi :

$$x_1 = 1 - |1 - 2x_0| = \begin{cases} 0, a_2 a_3 \dots & \text{si } a_1 = 0 \\ 0, \bar{a}_2 \bar{a}_3 \dots & \text{sinon} \end{cases}$$

Par une récurrence immédiate, on obtient le terme de rang n de la suite :

$$x_n = \begin{cases} 0, a_{n+1} a_{n+2} \dots & \text{s'il y a un nombre pair de 1 parmi } a_1, \dots, a_n \\ 0, \bar{a}_{n+1} \bar{a}_{n+2} \dots & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela étant, si x_0 est rationnel, son développement en base 2 est périodique à partir d'un certain rang N , de période k . Alors pour tout $n \geq N$, il y a nécessairement un nombre pair de 1 parmi les chiffres a_{n+1}, \dots, a_{n+2k} qui forment deux périodes consécutives, et bien sûr $a_{n+2k+\ell} = a_{n+\ell}$ pour tout ℓ . Il en résulte que $x_n = x_{n+2k}$ pour tout $n \geq N$, et donc (x_n) est périodique de période au plus $2k$ à partir du rang N .

Réciproquement, supposons (x_n) périodique à partir du rang N , et notons k une période. En comparant les chiffres de x_n et x_{N+k} , il vient (selon la parité du nombre de 1 parmi a_{N+1}, \dots, a_{N+k}) ou bien $a_{n+k} = a_n$ pour tout $n \geq N+1$, ou bien $a_{n+k} = \bar{a}_n$ pour tout $n \geq N+1$. Dans tous les cas, $a_{n+2k} = a_n$ pour tout $n \geq N+1$, et donc la suite des chiffres binaires de x_0 est périodique à partir du rang $N+1$, ce qui entraîne que x_0 est rationnel.

Finalement, la suite (x_n) est périodique si et seulement si x_0 est rationnel.

Corrigé de l'envoi 4 — 2005/2006

Problème 5 :

Soient x, y et z des réels strictement positifs tels que $xyz = 1$. Prouver que :

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

Notre solution :

Par symétrie des rôles, on peut supposer $x \leq y \leq z$. Alors :

$$\frac{1}{(1+y)(1+z)} \leq \frac{1}{(1+z)(1+x)} \leq \frac{1}{(1+x)(1+y)}$$

et si l'on note A la quantité de l'énoncé que l'on cherche à minorer, on obtient par l'inégalité de Chebyshev :

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \left[\frac{1}{(1+y)(1+z)} + \frac{1}{(1+z)(1+x)} + \frac{1}{(1+x)(1+y)} \right] \\ &= \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \times \frac{3 + x + y + z}{(1+x)(1+y)(1+z)}. \end{aligned}$$

Notons m la moyenne de x, y et z . De $xyz = 1$, on déduit $m \geq 1$, et on a en outre les inégalités :

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq m^3 \quad \text{et} \quad (1+x)(1+y)(1+z) \leq (1+m)^3.$$

Il s'ensuit $A \geq \frac{6m^3}{(1+m)^3} \geq \frac{3}{4}$, la dernière inégalité étant vérifiée car $m \geq 1$ et la fonction $t \mapsto \frac{6t^3}{(1+t)^3}$ est croissante sur \mathbb{R}^+ .

Corrigé de l'envoi 4 — 2005/2006

Problème 6 :

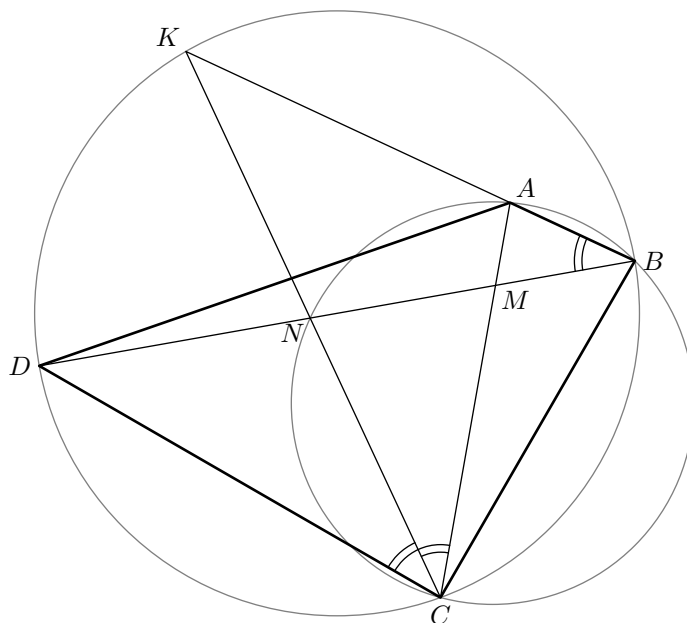
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et M le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. La bissectrice de l'angle \widehat{ACD} rencontre la droite (AB) en K . On suppose que :

$$MA \cdot MC + MA \cdot CD = MB \cdot MD.$$

Montrer que les angles \widehat{BKC} et \widehat{CDB} sont égaux.

Notre solution :

On commence par tracer une figure :



sur laquelle on a noté N le point d'intersection de (BD) et (CK) .

L'exercice revient à montrer que les points B, C, D et K sont cocycliques, ce qui traduit par une nouvelle égalité d'angles : $\widehat{KCD} = \widehat{KBD}$. Comme (CK) est bissectrice de l'angle \widehat{MCD} , cela revient encore à prouver l'égalité d'angles $\widehat{KCM} = \widehat{KBD}$, puis la cocyclicité des points A, B, C et N .

Pour cela on compare les produits $MA \cdot MC$ et $MB \cdot MN$. Par la loi des sinus dans les triangles CND et CNM , on a la relation $\frac{CD}{ND} = \frac{CM}{NM}$ d'où l'égalité $CD = MC \cdot \frac{ND}{NM}$. La relation de l'énoncé fournit alors :

$$MB \cdot MD = MA \cdot MC \cdot \left(1 + \frac{ND}{NM}\right) = MA \cdot MC \cdot \frac{MD}{NM}$$

d'où on obtient directement l'égalité $MA \cdot MC = MN \cdot MB$. La puissance d'un point par rapport à un cercle permet de conclure quant à la cocyclicité des points A, B, C et N .