

## Corrigé de l'envoi 3 — 2005/2006

### Problème 1 :

Trouver tous les couples  $(p, q)$  de nombres premiers vérifiant :

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

---

### Notre solution :

Modulo  $q$ , l'équation devient simplement  $p^3 \equiv p^2 \pmod{q}$ . Puisque  $p$  est premier avec  $q$  (en effet,  $p$  et  $q$  sont par hypothèse des nombres premiers et on vérifie facilement que l'on ne peut pas avoir  $p = q$ ), il reste  $p \equiv 1 \pmod{q}$ .

On peut encore préciser ce résultat en montrant que l'équation détermine la congruence de  $p$  modulo  $q^2$ . En effet, l'équation fournit  $p^3 \equiv p^2 + 2pq \pmod{q^2}$ , soit encore puisque  $p$  et  $q^2$  sont premiers entre eux,  $p^2 \equiv p + 2q \pmod{q^2}$ . Écrivons  $p = 1 + aq$  pour un certain entier  $a$ . Alors la congruence précédente devient :

$$1 + 2aq \equiv 1 + aq + 2q \pmod{q^2}$$

d'où on tire  $a \equiv 2 \pmod{q}$  et finalement  $p \equiv 2q + 1 \pmod{q^2}$ .

Par des arguments d'inégalités, nous allons à présent montrer que la congruence précédente est en réalité une égalité. Pour cela, il suffit de montrer que  $p < q^2 + 2q + 1 = (q + 1)^2$ . L'équation implique directement  $p^3 \geq q^5$  et donc  $p \geq q$ , puis  $(p + q)^2 \leq 4p^2$ . Ainsi  $p^3 - 4p^2 \leq q^5$ , soit encore :

$$p^2(p - 4) \leq q^5.$$

Mais si  $p \geq (q + 1)^2$ , alors  $p^2 > q^4$  et  $p - 4 \geq q^2$  (puisque  $q \geq 2$ , étant premier). On en déduit une contradiction, et par suite l'inégalité voulue et finalement  $p = 2q + 1$ .

On reporte cette valeur dans l'équation de départ qui fournit après simplification l'équation polynomiale :

$$q^3 - 8q - 3 = 0.$$

Les solutions entières sont des diviseurs du coefficient constant, ici 3. La seule solution possible est donc  $q = 3$ , ce qui fournit  $p = 7$ . On vérifie au final que ce couple est bien solution.

## Corrigé de l'envoi 3 — 2005/2006

### Problème 2 :

On note  $G$  (resp.  $I$ ) le centre de gravité (resp. le centre du cercle circonscrit) d'un triangle  $ABC$ . On désigne par  $a$ ,  $b$  et  $c$  les longueurs respectives des côtés  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ . Montrer que l'aire du triangle  $CIG$  a pour valeur :

$$\frac{|a - b| r}{6}$$

où  $r$  désigne le rayon du cercle inscrit à  $ABC$ .

---

### Notre solution :

Pour cet exercice, il est possible d'utiliser la notion de coordonnées barycentriques et le calcul de l'aire par la formule du produit vectoriel. On rappelle donc dans un premier temps que si  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont trois points du plan, l'aire du triangle  $PQR$  est donné par la formule :

$$\frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} \right\|.$$

Par ailleurs, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points non alignés dans le plan, tout point  $M$  de ce plan peut s'écrire comme barycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés de coefficients judicieusement choisis. Ces coefficients sont définis à multiplication près par un même réel et par la formule précédente<sup>1</sup> il est possible de les choisir égaux respectivement aux aires algébriques (*i.e.* comptés avec un signe négatif si l'on parcourt les sommets du triangle dans le sens négatif) des triangles  $MBC$ ,  $MCA$  et  $MAB$ .

Si  $I$  est le centre du cercle inscrit au triangle  $ABC$ , si  $r$  le rayon de ce cercle et si  $a$ ,  $b$  et  $c$  désignent les longueurs respectifs des côtés comme dans l'énoncé, il est facile de voir que l'aire du triangle  $MBC$  (resp.  $MCA$ , resp.  $MAB$ ) vaut  $ra$  (resp.  $rb$ , resp.  $rc$ ). Ainsi  $I$  s'écrit comme barycentre des points  $(A, a)$ ,  $(B, b)$  et  $(C, c)$ .

Des rappels précédents, on déduit l'égalité vectorielle :

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = 2p \overrightarrow{GI}$$

où  $p$  désigne le demi-périmètre de  $ABC$ . En prenant le produit vectoriel par  $\overrightarrow{GC}$ , il vient :

$$a \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{GC} + b \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{GC} = 2p \overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GC}.$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{GC}$  et  $\overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{GC}$  sont dirigés par un axe perpendiculaire au plan de travail, de sens opposé et de norme respective les aires des triangles  $GAC$  et  $GBC$ . On sait<sup>2</sup> que l'aire des triangles  $GAC$ ,  $GBC$  et  $GAB$  sont toutes trois égales au tiers de l'aire de  $ABC$ , c'est-à-dire à  $\frac{pr}{3}$ . Il reste donc :

$$2p \left\| \overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{GC} \right\| = \left| \frac{2(a - b)pr}{3} \right| = 2p \cdot \frac{|a - b|r}{3}.$$

On en déduit la valeur annoncée pour l'aire du triangle  $CIG$ .

---

<sup>1</sup>Pourquoi ?

<sup>2</sup>Cela découle également de ce qui précède puisque  $G$  est l'isobarycentre des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

## Corrigé de l'envoi 3 — 2005/2006

### Problème 3 :

Soit  $n \geq 1$  un entier. Trouver le plus petit entier  $N \geq 1$  vérifiant la propriété suivante : parmi  $N$  entiers quelconques, il en existe  $n$  dont la somme est divisible par  $n$ .

---

### Notre solution :

La réponse est  $N = 2n - 1$ . Déjà il est facile de prouver que cette constante est optimale. En effet, si l'on prend  $n - 1$  entiers congrus à 0 modulo  $n$  et  $n - 1$  entiers congrus à 1, on obtient un ensemble de cardinal  $2n - 2$  et il est manifestement impossible d'en sélectionner  $n$  dont la somme est nulle modulo  $n$  : en effet, on est obligé de prendre au moins un entier congru à 1 modulo  $n$ , et on ne peut évidemment pas en prendre plus de  $n - 1$ .

La réciproque est plus délicate. On commence par prouver que si le résultat est vrai pour  $n$  et  $m$  alors il est vrai pour  $nm$ . On considère donc  $2nm - 1$  entiers. D'après l'hypothèse, si l'on en choisit  $2n - 1$  quelconques parmi ces entiers, on peut en trouver  $n$  dont la somme  $s_1$  est divisible par  $n$ . On écarte ces  $n$  entiers et on recommence avec les  $2nm - 1 - n$  restants. On forme ainsi  $2m - 1$  groupes de  $n$  entiers, dont les sommes respectives  $s_1, \dots, s_{2m-1}$  sont toutes divisibles par  $n$ . Soit  $d$  le PGCD de  $m$  et  $n$ . Pour tout  $i$ , on pose  $d_i = \frac{s_i}{d}$ . Par hypothèse, parmi les  $2m - 1$  nombres  $d_i$ , on peut en trouver  $m$  dont la somme est divisible par  $m$ , disons  $d_1, \dots, d_m$ . Cela assure que la somme des  $mn$  nombres entiers de départ qui appartiennent aux groupes  $s_i$ , où  $i = 1, \dots, m$ , est divisible par  $mn$ , ce qui prouve bien que le résultat est vrai pour  $mn$ .

On en déduit qu'il suffit de prouver le résultat pour  $n = p$  premier. Considérons dans ce cas de entiers  $a_1, \dots, a_{2p-1}$ . Par l'absurde, supposons que l'on ne puisse en trouver  $p$  dont la somme soit divisible par  $p$ . Soit alors :

$$S = \sum (a_{i_1} + \dots + a_{i_p})^{p-1}$$

où la somme porte sur toutes les parties  $\{i_1, \dots, i_p\}$  à  $p$  éléments de  $\{1, 2, \dots, 2p - 1\}$ . Notons qu'il y a exactement  $t = \binom{2p-1}{p}$  telles parties et qu'alors :

$$t = \frac{(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)}{(p-1)!} \not\equiv 0 \pmod{p}$$

D'après le petit théorème de Fermat, on a donc  $S = 1 + 1 + \dots + 1 = t \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

D'autre part, si l'on développe chaque terme  $(a_{i_1} + \dots + a_{i_p})^{p-1}$  de la somme  $S$ , on obtient une somme de termes de la forme  $a_{i_1}^{e_{i_1}} \cdots a_{i_p}^{e_{i_p}}$ , où les  $e_{i_j}$  sont des entiers positifs ou nuls dont la somme est égale à  $p - 1$ . Intéressons-nous à un terme fixé de cette forme, disons  $a_1^{e_1} \cdots a_r^{e_r}$ , où  $r$  représente donc le nombre de  $a_i$  qui apparaissent avec un exposant non nul. Ce terme apparaît dans  $S$  exactement autant de fois que l'on peut choisir  $p - r$  termes parmi  $2p - 1 - r$  (ceux qui ont au contraire un exposant nul dans le développement). Le coefficient de  $a_1^{e_1} \cdots a_r^{e_r}$  est donc égal à :

$$\binom{2p-1-r}{p-r} = \frac{(2p-1-r)\cdots p\cdots(p-r+1)}{(p-r)!} \equiv 0 \pmod{p}$$

Donc, tous les coefficients sont divisibles par  $p$ , ce qui assure que  $S$  elle-même est divisible par  $p$ . Nous avons la contradiction désirée, et le résultat en découle.

## Corrigé de l'envoi 3 — 2005/2006

### Problème 4 :

Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui prennent la valeur 1 et qui vérifient l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(n + f(n)) = f(n).$$

---

### Notre solution :

L'énoncé dit qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $f(n_0) = 1$ . Si on l'applique l'équation fonctionnelle avec  $n = n_0$ , il vient directement  $f(n_0 + 1) = 1$  et puis par récurrence  $f(n) = 1$  pour tout  $n \geq n_0$ .

Ainsi, si l'on note  $n_0$  le plus petit entier tel que  $f(n_0) = 1$ , on a  $f(n) = 1$  pour tout  $n \geq n_0$  et  $f(n) \geq 1$  pour tout  $n < n_0$ .

Considérons à présent un entier  $n < n_0$  et supposons  $a = f(n) \neq 0$ . Par l'équation fonctionnelle, on obtient  $f(n + a) = a$ , puis par une récurrence immédiate  $f(n + ka) = a$  pour tout entier  $k \geq 0$ . Or il existe  $k$  tel que  $n + ka \geq n_0$ , d'où on tire  $a = 1$ . Mais cela est en contradiction avec  $n < n_0$ . Il en résulte que  $f(n) = 0$  pour tout  $n < n_0$ .

On vérifie finalement sans difficulté que les fonctions de la forme précédente sont toutes solutions.

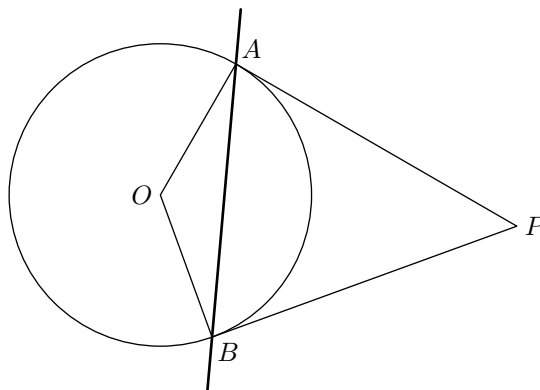
## Corrigé de l'envoi 3 — 2005/2006

### Problème 5 :

Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe, inscriptible. Les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  se coupent en  $P$  et les droites  $(AB)$  et  $(DC)$  en  $Q$ . On appelle  $E$  et  $F$  les points de contact de tangentes issues de  $Q$  au cercle circonscrit à  $ABCD$ . Montrer que les points  $P$ ,  $E$  et  $F$  sont alignés.

### Notre solution :

Commençons par quelques précisions<sup>3</sup> sur les droites et les points polaires par rapport à un cercle. Fixons donc  $\Gamma$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Notons  $P$  un point au-delà de  $\Gamma$ . Par  $P$ , on mène les deux tangentes à  $\Gamma$  et on note  $A$  et  $B$  les points de contact.



On a :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) = R^2$$

et une égalité analogue en remplaçant  $A$  par  $B$ . On en déduit que la droite  $(AB)$  a pour équation  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = R^2$ .

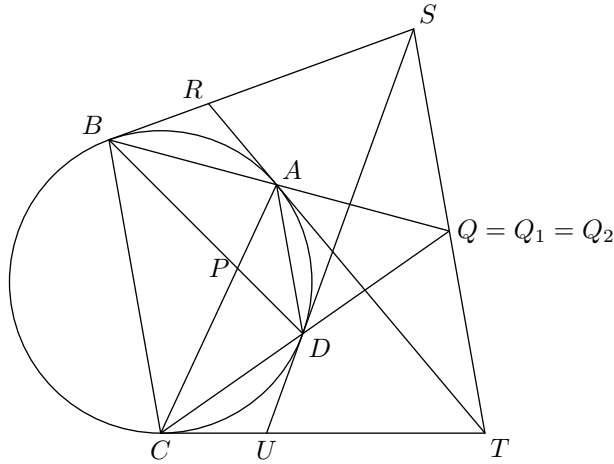
Étant donné maintenant un point  $P$  du plan différent de  $O$  (mais éventuellement à l'intérieur du cercle), on définit la droite polaire de  $P$  comme la droite d'équation  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = R^2$ . (On a donc vu précédemment comment construire géométriquement cette droite dans le cas où  $P$  est un point extérieur au cercle.) La polarité définit donc une application<sup>4</sup> du plan privé du point  $O$  dans l'ensemble des droites ne passant pas par  $O$ . Il est facile de vérifier que cette application est une bijection. On dira alors que le point polaire d'une droite  $(D)$  (ne passant pas par  $O$ ) est l'unique antécédent de  $(D)$  par l'application précédente.

On remarque finalement que  $P$  est situé sur la polaire de  $Q$  si, et seulement si  $Q$  est situé sur la polaire de  $P$ . On dit alors que  $P$  et  $Q$  sont des points conjugués et cela se traduit par l'égalité  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = R^2$ .

Revenons à présent à l'exercice. On prend pour  $\Gamma$  le cercle circonscrit au quadrilatère  $ABCD$ . On note  $R$  (resp.  $S$ ,  $T$ ,  $U$ ) le point polaire de  $(AB)$  (resp.  $(BD)$ ,  $(AC)$ ,  $(CD)$ ).

<sup>3</sup>Celles-ci ne sont pas vraiment nécessaires pour traiter l'exercice, mais elles éclairent certainement les raisonnements.

<sup>4</sup>Les restrictions qui apparaissent sur les ensembles de départ et d'arrivée peuvent être évitées en se plaçant dans le plan projectif. Ce qu'hélas, nous n'avons pas la place de détailler dans ce corrigé.



Comme  $P$  est situé sur  $(BD)$ , les points  $S$  et  $P$  sont conjugués. Il en est de même des points  $T$  et  $P$ . D'où on déduit que la droite  $(ST)$  est la polaire du point  $P$ . Pour conclure, il suffit donc de montrer que  $Q$  est sur la droite  $(ST)$ .

D'après notre remarque initiale, la droite  $(AB)$  s'obtient en joignant les points de tangence des droites issues de  $R$  au cercle  $\Gamma$ . Comme  $A$  et  $B$  sont sur  $\Gamma$ , ils sont les points de tangence en question d'où on tire en particulier  $RA = RB$ . De même, on a  $SB = SD$ ,  $TA = TC$  et  $UC = UD$ . Le théorème de Ménélaüs appliqué successivement dans les triangles  $RST$  et  $STU$  avec les sécantes respectives  $(AB)$  et  $(CD)$  fournit les égalités :

$$\frac{Q_1S}{Q_1T} = \frac{AR}{AT} \cdot \frac{BS}{BR} = \frac{TA}{SB} \quad ; \quad \frac{Q_2S}{Q_2T} = \frac{UC}{TC} \cdot \frac{DS}{DU} = \frac{TC}{SD}$$

où  $Q_1$  et  $Q_2$  sont les points d'intersection de  $(ST)$  avec les sécantes respectives. On en déduit que les rapports  $\frac{Q_1S}{Q_1T}$  et  $\frac{Q_2S}{Q_2T}$  sont égaux et donc que  $Q_1 = Q_2$ . Ce point est donc confondu avec  $Q$ , et cela conclut.

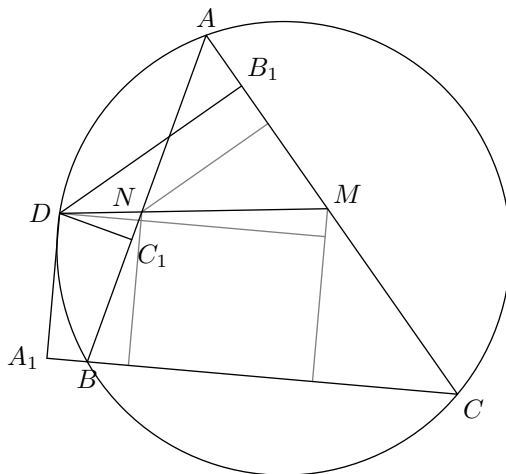
## Corrigé de l'envoi 3 — 2005/2006

### Problème 6 :

Dans un triangle  $ABC$ ,  $M$  et  $N$  désignent respectivement les points d'intersection des bissectrices des angles en  $B$  et  $C$  avec les côtés opposés. On appelle  $D$  l'intersection de la demi-droite  $[MN)$  avec le cercle circonscrit à  $ABC$ . Montrer que :

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}.$$

### Notre solution :



Notons  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$  les projetés orthogonaux respectifs du point  $D$  sur les droites  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$ . On a alors :

$$DB_1 = DA \sin \widehat{DAC} = \frac{DA \cdot DC}{2R}$$

où  $R$  est le rayon du cercle circonscrit à  $ABC$ . De même, on a les égalités  $DA_1 = \frac{DB \cdot DC}{2R}$  et  $DC_1 = \frac{DA \cdot DB}{2R}$ . Pour conclure, il suffit donc de montrer que  $DB_1 = DA_1 + DC_1$ .

Le point  $M$  est sur la bissectrice de  $\widehat{ABC}$ , il est donc situé à égale distance des droites  $(BA)$  et  $(BC)$ . Notons  $m$  cette distance commune. De même, notons  $n$  le distance du point  $N$  aux droites  $(CA)$  et  $(CB)$ . Posons  $x = \frac{DM}{MN}$ . Le théorème de Thalès appliquée dans le triangle  $DB_1N$  avec la parallèle  $(DB_1)$  passant par  $N$  donne l'égalité :

$$\frac{DB_1}{n} = x$$

d'où on tire  $DB_1 = xn$ . De même, il vient  $DC_1 = m(x - 1)$ . Finalement pour évaluer  $DA_1$ , on mène les perpendiculaires à  $(BC)$  passant par  $M$  et  $N$  et la parallèle à  $(BC)$  passant par  $D$ . En appliquant Thalès dans le triangle obtenu, on trouve :

$$\frac{DA_1 - m}{n - m} = x$$

d'où  $DA_1 = m + nx - mx = DB_1 + DC_1$  comme voulu.