Corrigé de l'envoi 1 — 2005/2006

Problème 1 :
Soient a, b, c trois réels strictement positifs tels que $ab + bc + ca = 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Notre solution :

On remarque en premier lieu que l'inégalité à prouver peut se simplifier considérablement. En effet, on a :

$$\frac{1}{a+b} - \frac{ab}{a+b} = \frac{1-ab}{a+b} = \frac{bc+ca}{a+b} = c$$

et des égalités analogues en permutant circulairement les lettres a, b et c. On en déduit directement que pour conclure, il suffit de prouver $a + b + c \geqslant \sqrt{3}$.

Pour cela, on calcule :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 2.$$

De plus, par l'inégalité de réordonnement, on a $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca = 1$. Finalement $(a + b + c)^2 \geqslant 3$ et donc $a + b + c \geqslant \sqrt{3}$ comme voulu.

Corrigé de l'envoi 1 — 2005/2006

Problème 2 :

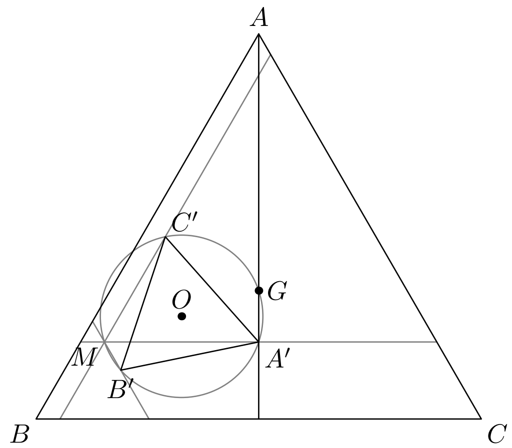
Soient ABC un triangle équilatéral, G son centre de gravité et M un point intérieur au triangle. Soit O le milieu du segment $[MG]$. On considère les trois segments contenant M parallèles à un côté du triangle et dont les extrémités appartiennent aux deux autres côtés.

a) Montrer que le point O est équidistant des milieux de ces trois segments.

b) Montrer que les milieux des trois segments sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Notre solution :

a) Notons A', B' et C' les milieux des segments considérés comme le montre la figure suivante :



Par la propriété de la droite des milieux, ou si l'on préfère une instance du théorème de Thalès, la droite (AA') passe par le milieu du segment $[BC]$, et donc aussi par le point G. Cette droite est en particulier perpendiculaire à (BC), ce qui assure que le triangle MGA' est rectangle en A'. Le cercle circonscrit à ce triangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse $[MG]$, c'est-à-dire le point O. Finalement $OA' = OG$. De même, on obtient $OB' = OG$ et $OC' = OG$, d'où on déduit que O est équidistant des points A', B' et C'.

b) La démonstration du *a)* assure que les cinq points M, G, A', B' et C' sont cocycliques (sur le cercle de diamètre $[MG]$). Étant donnée la position des points sur le cercle, on en déduit l'égalité :

$$\widehat{B'A'C'} = \pi - \widehat{B'MC'}.$$

Mais les directions des droites (MB') et (MC') sont connues, ainsi donc que l'angle $\widehat{B'MC'}$ qui vaut $\frac{2\pi}{3}$. Par suite, $\widehat{B'A'C'} = \frac{\pi}{3}$. On démontre pareillement que les autres angles du triangle $A'B'C'$ valent $\frac{\pi}{3}$, ce qui suffit pour conclure que ce triangle est équilatéral.

Corrigé de l'envoi 1 — 2005/2006

Problème 3 :

Soit k un entier naturel. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $n2^k - 7$ soit un carré parfait.

Notre solution :

L'exercice revient à montrer qu'il existe une infinité d'entiers x tels que $x^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$ (deux x différents donnent nécessairement deux n distincts). Évidemment si x est solution de la congruence précédente, il en est de même de tout entier congru à x modulo 2^k. On en déduit que l'existence d'une solution entraine l'existence d'une infinité de solutions.

Il ne reste donc qu'à prouver que les équations $x^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$ admettent toutes une solution. On raisonne pour cela par récurrence sur k. Il n'y a aucun problème à vérifier que $x = 1$ est solution pour tout $k \leqslant 3$. Pour passer de k à $k+1$ on procède comme suit. On note x_k une solution de $x_k^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$ et on cherche une solution x de la congruence modulo 2^{k+1} sous la forme $x = x_k + 2^{k-1}y$ pour un certain entier y. On a :

$$x^2 = (x_k + 2^{k-1}y)^2 = x_k^2 + 2^k x_k y + 2^{2k-2}y^2 \equiv x_k^2 + 2^k x_k y \pmod{2^{k+1}}.$$

Or par hypothèse $x_k^2 = -7 + n2^k$ pour un certain entier n et donc la congruence précédente se réécrit :

$$x^2 \equiv -7 + 2^k(n + x_k y) \pmod{2^{k+1}}.$$

Il suffit donc pour conclure de choisir y tel que $n + x_k y \equiv 0 \pmod 2$, mais cela est possible puisque x_k est nécessairement impair (étant donné que son carré est impair) et qu'ainsi la congruence devient simplement $n + y \equiv 0 \pmod 2$. Ces considérations terminent l'hérédité de la récurrence et résolvent par le fait l'exercice.

Remarque. L'énoncé de cet exercice est très proche de ce que l'on appelle le *lemme de Hensel* et la démonstration que nous avons proposé s'inspire beaucoup de la preuve de ce lemme. Pour de plus amples informations sur l'énoncé, la démonstration et de nombreuses variantes de ce lemme, on pourra se reporter au poly d'arithmétique[1], paragraphe 3.6. En particulier, on pourra lire avec attention la proposition 3.6.5 dont la résolution de cet exercice en est une conséquence directe.

---

[1] Voir `http://www.animath.fr/cours/arithm.pdf` ou `http://www.animath.fr/cours/arithm.ps.gz`.

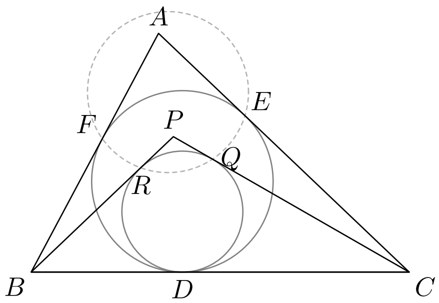
Corrigé de l'envoi 1 — 2005/2006

Problème 4 :

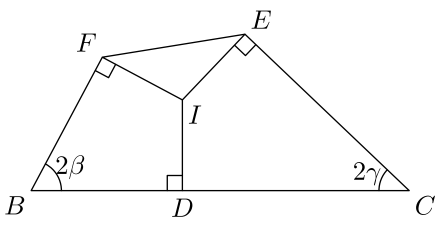
Soit ABC un triangle. On note D, E et F les points de contact du cercle inscrit dans ABC avec les côtés BC, CA et AB. Soit P un point intérieur à ABC tel que le cercle inscrit dans PBC passe par D. On note Q et R les points de contact du cercle inscrit dans PBC avec PC et PB. Montrer que les points E, F, Q et R sont cocyliques.

Notre solution :

On commence par tracer une figure :



La propriété de cocyclicité équivaut à la supplémentarité des angles $\widehat{FRQ}$ et $\widehat{FEQ}$. On effectue une chasse aux angles. On se focalise d'abord sur le quadrilatère $BFEC$. On note pour cela I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et on trace une nouvelle figure sur laquelle on isole ce quadrilatère :



On note 2β et 2γ la mesure des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle ABC. Comme I est le centre du cercle inscrit, on a les orthogonalités marquées sur la figure. La somme des angles d'un quadrilatère vaut 2π. En appliquant ceci à $BFID$, on obtient $\widehat{FID} = \pi - 2\beta$. De même, $\widehat{EID} = \pi - 2\gamma$ d'où il vient $\widehat{EIF} = 2\beta + 2\gamma$. Le triangle EIF est isocèle en I, et donc $\widehat{IFE} = \widehat{IEF} = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma$. Finalement, dans le quadrilatère $BFEC$, les angles en E et F sont égaux et valent $\pi - \beta - \gamma$.

Revenons désormais à la première figure. En appliquant le même raisonnement que précédemment au quadrilatère $BRQC$, en notant $2\beta'$ et $2\gamma'$ les angles en B et C dans le triangle PBC, on obtient $\widehat{BRQ} = \widehat{CQR} = \pi - \beta' - \gamma'$. Il s'ensuit :

$$\widehat{FRQ} = 2\pi - \widehat{FRB} - \widehat{BRQ} = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta + \beta'\right) - (\pi - \beta' - \gamma') = \frac{\pi}{2} + \beta + \gamma'$$

la valeur de $\widehat{FRB}$ résultant du fait que le triangle FRB est isocèle en B (puisque $BR = BD = BF$). De même $\widehat{FEQ} = \widehat{FEC} - \widehat{CEQ} = \frac{\pi}{2} - \beta - \gamma'$ d'où on vérifie directement $\widehat{FRQ} + \widehat{FEQ} = \pi$, ce qui conclut.

Corrigé de l'envoi 1 — 2005/2006

Problème 5 :

Existe-t-il une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant simultanément les trois conditions suivantes :

1. il existe un réel M tel que pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant M$
2. $f(1) = 1$
3. pour tout réel x non nul :

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)^2.$$

Notre solution :

Nous allons montrer qu'une telle fonction n'existe pas. Examinons pour cela les conditions qu'elle devrait vérifier. Dans un premier temps l'équation fonctionnelle donne, en prenant $x = 1$, $f(2) = 2$. Nous allons maintenant montrer que s'il existe un réel $x > 1$ tel que $f(x) = y \geqslant 2$, il existe un réel $x' > 1$ tel que $f(x') \geqslant y + 1$. En itérant ce procédé à partir du réel $x_0 = 2$, on obtiendra une suite x_n de réels vérifiant $f(x_n) \geqslant n+2$, ce qui est manifestement en contradiction avec le premier point.

Il ne reste donc qu'à montrer la propriété. Soit $x > 1$ tel que $f(x) = y \geqslant 2$. D'après l'équation fonctionnelle, on a :

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)^2.$$

Si $|f(\frac{1}{x})| \geqslant 1$, alors $x' = x + \frac{1}{x^2}$ convient. Sinon, on utilise à nouveau l'équation fonctionnelle mais avec le paramètre $\frac{1}{x}$, obtenant :

$$f\left(\frac{1}{x} + x^2\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)^2.$$

En posant $x' = \frac{1}{x} + x^2$, il vient $f(x') \geqslant y^2 - 1 \geqslant y + 1$ puisque l'on a supposé $y \geqslant 2$. Ceci conclut la démonstration.

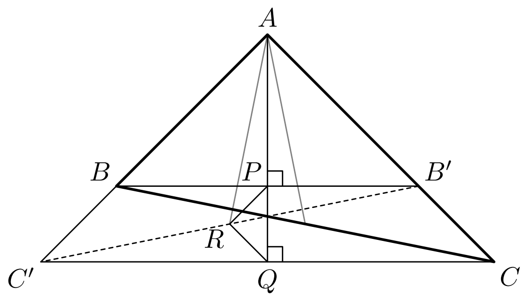
Corrigé de l'envoi 1 — 2005/2006

Problème 6 :

Soit ABC un triangle. On note Δ la bissectrice intérieure issue de A. Soient P et Q les projetés orthogonaux de B et C sur Δ. Soit R le point tel que (PR) soit parallèle à (AB) et (QR) soit parallèle à (AC). Montrer que (AR) est la symédiane issue de A, c'est-à-dire la droite symétrique par rapport à Δ de la médiane issue de A du triangle ABC.

Notre solution :

Notons s la symétrie par rapport à (Δ) et B' (resp. C') l'image de B (resp. C) par s.



Comme s échange les droites (AB) et (AC) les points A, B et C' d'une part, et A, B' et C d'autre part sont alignés.

Notons M' le milieu de $[B'C']$. Par le théorème de Thalès, les droites (PR) et (QR) coupent $(B'C')$ en M'. Le point R, intersection de ces deux droites, est donc confondu avec M'. Il s'ensuit que son image par s est le milieu de $[BC]$, puis que celle de la droite (AR) est la médiane issue de A dans le triangle ABC.