Corrigé de l'envoi 4 — 2004/2005

Problème 1 :
Les entiers $1, 2, \dots, n^2$ sont répartis dans les cases d'un damier $n \times n$ de sorte que pour chaque ligne et chaque colonne la somme des nombres écrits soit la même (un nombre par case). Pour tout choix de deux cases distinctes, on construit un vecteur dont l'origine est le centre de la case de plus petit numéro et l'extrémité est le centre de la case de plus grand numéro. Prouver que la somme de tous ces vecteurs est nulle.

Notre solution :

Commençons par une remarque. La somme de tous les nombres inscrits dans le damier est la somme de tous les entiers compris entre 1 et n^2, et donc elle vaut $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$. Comme il y a n lignes (resp. n colonnes), la somme des entiers inscrits sur une ligne (resp. une colonne) vaut $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Pour i compris entre 1 et n^2, notons M_i le centre de la case numérotée i. Notons également $\overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{OM_i}$ où O est un point quelconque, mais néanmoins fixé. La somme que l'on a à évaluer s'écrit :

$$\overrightarrow{S} = \sum_{i<j} \overrightarrow{M_i M_j} = \sum_{i<j} \overrightarrow{u}_j - \overrightarrow{u}_j$$

Pour i fixé, le vecteur $\overrightarrow{u}_i$ apparaît $(i-1)-(n^2-i) = 2i-n^2-1$ fois dans l'expression précédente. La somme $\overrightarrow{S}$ se réécrit donc :

$$\overrightarrow{S} = \sum_{i=1}^{n^2} (2i - n^2 - 1)\overrightarrow{u}_i$$

Projetons $\overrightarrow{S}$ sur l'axe horizontal (à supposer que le damier ne soit pas orienté n'importe comment, hein) et regardons ce que vaut la somme précédente si l'on ne somme que sur les indices i apparaissant dans une colonne C fixée. Dans ce cas la projection de $\overrightarrow{u}_i$ est constante et sort donc de la somme. Il reste ainsi à calculer :

$$\sum_{i \in C} (2i - n^2 - 1) = 2 \sum_{i \in C} i - n(n^2+1)$$

et ce dernier résultat est nul d'après la première remarque faite. En sommant ensuite sur toutes les colonnes, on conclut que la projection de $\overrightarrow{S}$ sur l'axe horizontal est nulle.

De même, en sommant sur les lignes, on prouve que la projection de $\overrightarrow{S}$ sur l'axe vertical est nulle. On en déduit directement que $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{0}$ comme on le voulait.

Corrigé de l'envoi 4 — 2004/2005

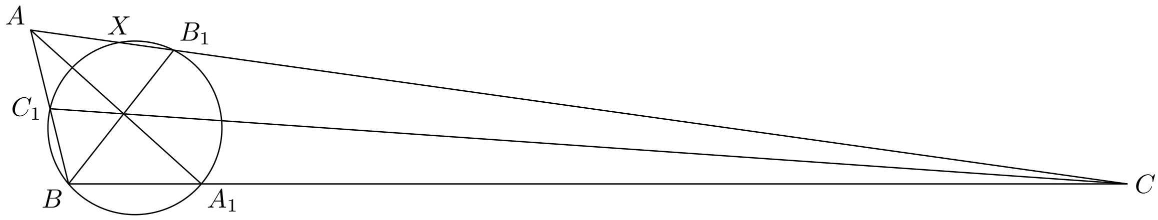
Problème 2 :

Dans le triangle ABC, les bissectrices des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ rencontrent les côtés opposés respectivement en A_1, B_1 et C_1. Prouver que si le quadrilatère $BA_1B_1C_1$ est inscriptible dans un cercle alors :

$$\frac{BC}{AC+AB}+\frac{AB}{BC+AC}=\frac{AC}{AB+BC}$$

Notre solution :

Commençons par tracer une figure claire, ce qui est déjà loin d'être facile[1] :



Appelons Γ le cercle circonscrit à $BA_1B_1C_1$. Il intersecte la droite (AC) en X et B_1. On commence par prouver que X appartient à $[AC]$: en effet, A appartient à la droite (BC_1) mais pas au segment $[BC_1]$, donc A est extérieur à Γ. De même C est extérieur à Γ. Par contre, tout le segment $[B_1X]$ est lui intérieur à Γ, et donc ne peut contenir ni A ni C. Comme B_1 appartient au segment $[AC]$ c'est donc qu'il en est de même de X.

On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. En utilisant la puissance de A par rapport à Γ, on a $AC_1 \cdot AB = AX \cdot AB_1$. D'autre part, en appliquant la loi des sinus dans les triangles ACC_1, BCC_1 et ABC, on obtient :

$$\frac{AC_1}{\sin(\hat{C}/2)}=\frac{CC_1}{\sin\hat{A}} \quad ; \quad \frac{BC_1}{\sin(\hat{C}/2)}=\frac{CC_1}{\sin\hat{B}} \quad ; \quad \frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$$

d'où on déduit sans mal $\frac{AC_1}{a}=\frac{BC_1}{b}$ puis $AC_1=\frac{bc}{a+b}$. De même, $AB_1=\frac{bc}{a+c}$. Par suite $AX = \frac{AC_1\cdot AB}{AB_1}=\frac{c(a+c)}{a+b}$ et $CX=\frac{a(a+c)}{b+c}$. Ainsi :

$$b = AC = AX + XC = (a+c)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}\right)$$

d'où la conclusion.

---

[1]On peut par exemple s'aider du résultat à prouver pour obtenir une configuration dans laquelle les quatre points sont bien cocycliques.

Corrigé de l'envoi 4 — 2004/2005

Problème 3 :

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que pour tous entiers m et n, on ait $f(m)^2 + f(n)$ divise $(m^2+n)^2$.

Notre solution :

Avant tout, on remarque que la fonction identité est une solution évidente. Nous allons prouver que c'est la seule.

On commence par essayer des petites valeurs pour m et n, au hasard $m = n = 1$. L'hypothèse assure alors que le nombre $f(1)^2+f(1)$ est un diviseur de 4, donc soit 1, soit 2, soit 4. En résolvant les équations de degré 2 correspondantes, on remarque qu'il n'y a qu'une seule possibilité pour laquelle $f(1)$ est un entier strictement positif : c'est $f(1) = 1$.

Une bonne situation pour utiliser l'hypothèse est celle où $m^2 + n$ a peu de diviseurs, par exemple si c'est un nombre premier. Considérons donc $m = 1$ et $n = p - 1$ où p est un nombre premier. Alors $1+f(p-1)$ doit être un diviseur de p^2, c'est-à-dire soit 1, soit p, soit p^2. La valeur 1 est exclue, car $f(p-1)$ ne saurait être nul. Il reste donc $f(p-1) = p-1$ ou $f(p-1) = p^2-1$.

Cependant, en prenant $m = p - 1$ et $n = 1$, on obtient la divisibilité

$$f(p-1)^2 + 1 \mid ((p-1)^2+1)^2 = (p^2-2p+2)^2$$

Mais si $f(p-1) = p^2 - 1$, le terme de gauche vaut $(p^2-1)^2 + 1 = p^4 - 2p^2 + 2$. On en déduit que $p^2 - 2p + 2$ divise $p^4 - 2p^2 + 2$, c'est-à-dire que le quotient :

$$\frac{p^4-2p^2+2}{p^2-2p+2} = p^2 + 2p - \frac{4p-2}{p^2-2p+2}$$

est entier. Or, si $p \geqslant 5$, on a $0 < |4p-2| < |p^2-2p+2|$, ce qui ne peut se produire. Ainsi, pour tout nombre premier $p \geqslant 5$, on obtient $f(p-1) = p-1$.

Mais alors, pour tout entier n et tout $p \geqslant 5$ premier, on a $f(n)+f(p-1)^2$ divise $((p-1)^2+n)^2$. Or :

$$\frac{((p-1)^2+n)^2}{f(n)+f(p-1)^2} = \frac{((p-1)^2+n)^2}{f(n)+(p-1)^2} = (p-1)^2 + 2n - f(n) + \frac{(f(n)-n)^2}{f(n)+(p-1)^2}$$

Cela assure que $\frac{(f(n)-n)^2}{(p-1)^2+f(n)}$ est un entier, clairement positif ou nul. En choisissant p suffisamment grand, on peut rendre cet entier plus petit que 1, et donc être sûr qu'il est nul. Ce qui entraine que $f(n) = n$ pour tout entier n.

Corrigé de l'envoi 4 — 2004/2005

Problème 4 :

Prouver qu'il est possible de colorier chaque rationnel strictement positif soit en rouge soit en bleu de sorte que, pour tout rationnel $q > 0$ les nombres q et $\frac{1}{q}$ sont de la même couleur alors que les nombres q et $q+1$ sont de couleurs différentes.

Notre solution :

Commençons par regarder un peu concrètement ce que les conditions imposent sur la coloration. Pour cela, considérons un rationnel strictement positif, disons $\frac{s}{t}$ (avec s et t des entiers strictement positifs donc, premiers entre eux). La couleur de $\frac{s}{t}$ est déterminée par la couleur d'un rationnel de l'intervalle $]0,1]$ puisque si q et r désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de s par t, on a $\frac{s}{t} = q + \frac{r}{t}$. Ainsi, si $r = 0$, le couleur de $\frac{s}{t}$ est déterminée par la couleur de l'entier 1 (selon la parité de $q-1$) et sinon elle est déterminée par la couleur de $\frac{r}{t}$ (selon la parité de q). Dans ce dernier cas, on peut continuer : les rationnels $\frac{r}{t}$ et $\frac{t}{r}$ doivent être de même couleur et on a $\frac{r}{t} > 1$. On effectue donc à nouveau la division euclidienne de r par t... et ainsi de suite.

Cette descente s'arrête forcément au bout d'un nombre fini d'étapes puisqu'on vérifie sans mal (en utilisant la définition de la division euclidienne) que les dénominateurs des rationnels qui apparaissent décroissent strictement. On prouve ainsi qu'il y a au plus une coloration qui convient, et en prime, on obtient même une méthode pour trouver cette coloration : pour colorier le rationnel $\frac{s}{t}$, on effectue l'algorithme d'Euclide avec les entiers s et t, et la couleur s'obtient en regardant la parité de la somme des quotients successifs (pair pour rouge et impair pour bleu par exemple).

Remarque.

La décomposition du rationnel $\frac{s}{t}$ que l'on vient de donner s'appelle la *décomposition en fractions continues* et n'est autre qu'une reformulation de l'algorithme d'Euclide. Montrons comment les calculs s'opèrent pour le rationnel $q = \frac{437}{386}$. On commence par écrire $\frac{437}{386} = 1 + \frac{51}{386}$. Ainsi q est de la couleur « opposée » à celle de $\frac{51}{386}$ et donc à celle de $\frac{386}{51}$. On continue en écrivant $\frac{386}{51} = 7 + \frac{29}{51}$ d'où on prouve que q est de la même couleur que $\frac{51}{29}$. On poursuit le calcul :

$$\frac{51}{29} = 1 + \frac{22}{29} \quad ; \quad \frac{29}{22} = 1 + \frac{7}{22} \quad ; \quad \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

d'où q est de la couleur opposée à celle de 7, c'est-à-dire de la couleur opposée à celle de 1. Ainsi si on a choisi arbitrairement de colorier 1 en rouge, q doit être colorié en bleu.

L'écriture en fraction continue est :

$$q = \frac{437}{386} = \mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{7} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{3} + \cfrac{1}{\mathbf{7}}}}}}$$

Pour déterminer la couleur de q, on regarde simplement la parité de la somme des quotients, c'est-à-dire des entiers inscrits en gras dans l'écriture précédente.

Corrigé de l'envoi 4 — 2004/2005

Problème 5 :

Un groupe de 2005 informaticiens est retenu prisonnier par un terroriste très puissant qui a besoin de leurs compétences. Afin de s'assurer que les otages ne sont pas des plaisantins, il décide de leur faire passer un test.

Les règles du jeu[2] sont les suivantes : le terroriste choisit une suite de 2005 lettres, dans laquelle une certaine lettre est répétée au moins 1003 fois. Il isole ensuite un des informaticiens dans une salle lugubre. Sur un des murs, on distingue un minuscule tableau, une brosse et un vague morceau de craie. Un micro annonce la première lettre. L'informaticien doit inscrire sur le tableau une lettre (pas forcément celle prononcée) et un nombre d'au plus quatre chiffres. Finalement, l'informaticien sort et rejoint une cellule close encore plus petite et lugubre.

C'est au tour du second informaticien. Il rentre dans la salle au tableau. Le micro annonce la deuxième lettre. L'informaticien doit alors modifier l'inscription laissée au tableau, mais en respectant toujours les mêmes consignes (seules une lettre et un nombre de moins de quatre chiffres doivent rester sur le tableau). On continue ainsi avec les 2003 autres informaticiens. Le terroriste demande finalement au dernier informaticien la lettre majoritaire (bien entendu, il n'a pas le droit de consulter ses collègues).

Proposer un algorithme qui répond aux exigences du terroriste et permet aux informaticiens de prouver leur crédibilité.

Notre solution :

Vu le nombre réduit de possibilités, l'algorithme est assez facile à imaginer. Par exemple, on peut avoir la chose suivante : le premier informaticien inscrit la lettre qu'il a entendue et le nombre (appelé *compteur*) 1. Les autres informaticiens suivent les instructions suivantes : si la lettre qu'ils ont entendue est la même que celle inscrite sur le tableau, ils ne modifient pas cette lettre et ajoutent 1 au compteur. Sinon, ils ne modifient pas non plus la lettre mais retranchent 1 au compteur sauf si celui-ci indique 0. Dans ce dernier cas, ils remplacent la lettre par celle qu'ils ont entendue et mettent le compteur à 1.

Le dernier informaticien, après avoir fait la manipulation précédente, déclare en sortant de la salle la lettre inscrite sur le tableau.

Reste à prouver que la méthode fonctionne. On commence par constater qu'avant un premier retour éventuel à 0 du compteur, le compteur indique l'excès du premier élément sur tous les autres. Ainsi, si le compteur ne retombe jamais à 0, c'est que la première lettre de la suite était majoritaire (dans le sens où elle apparaît au moins 1003 fois), et donc l'algorithme fonctionne bien dans ce cas.

Sinon, on regarde la première fois où le compteur retombe à 0. Appelons *segment* ce qui précède ce moment dans la séquence globale, et *queue* ce qui suit. Pour se ramener au cas précédent (par une récurrence immédiate), il suffit de montrer que si un élément y est globalement majoritaire (*i.e.* apparaît strictement plus de la moitié des fois) dans la suite complète, alors il l'est aussi dans la queue. Soit x le premier élément de la suite. Dans le segment, il y a autant de x que de non-x. Soit n ce nombre. Soit aussi m le nombre de y dans le segment. On a forcément $m \leqslant n$ car aucun élément n'apparait plus souvent que x. On a $2n - m$ non-y dans le segment. L'excès de y augmente donc, lorsque l'on supprime le segment, de $(2n-m)-m = 2(n-m) \geqslant 0$, ce qui prouve bien que y reste globalement majoritaire.

---

[2] Ah ah !

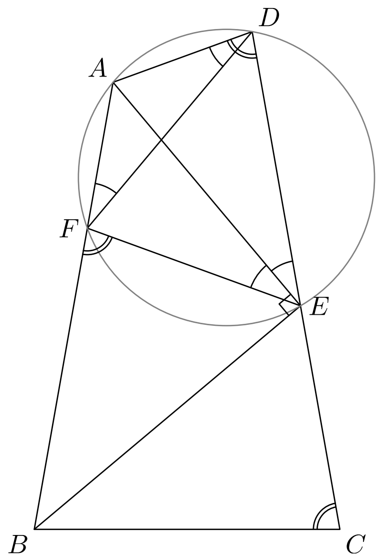
Corrigé de l'envoi 4 — 2004/2005

Problème 6 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{BCD} = \widehat{CDA}$. La bissectrice de $\widehat{ABC}$ rencontre $[CD]$ en E. Prouver que $\widehat{AEB} = \frac{\pi}{2}$ si et seulement si $AB = AD + BC$.

Notre solution :

Première méthode.



Supposons $\widehat{AEB} = \frac{\pi}{2}$. Notons F le symétrique de C par rapport à la droite (BE). C'est un point de (AB) puisque (BE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Alors $BC = BF$ et $\widehat{BFE} = \widehat{BCE} = \widehat{EDA}$. Du coup, les points A, D, E et F sont cocycliques. De $\widehat{AEB} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{CEB} = \widehat{BEF}$, il vient $\widehat{FEA} = \widehat{AED}$. Par suite, $\widehat{FDA} = \widehat{FEA} = \widehat{AED} = \widehat{AFD}$. D'où $AF = AD$, ce qui conduit bien à $AB = AF + FB = AD + BC$.

Réciproquement, si $AB = BC + AD$ alors, il existe un point F sur $[AB]$ tel que $BF = BC$ et $AF = AD$. Les triangles BCE et BFE sont alors isométriques et comme ci-dessus, on prouve que A, D, E et F sont cocycliques et $\widehat{FDA} = \widehat{AFD}$. Par suite, $\widehat{FEA} = \widehat{FDA} = \widehat{AFD} = \widehat{AED}$ ce qui assure que la droite (AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DEF}$. Alors (AE) et (BE) sont perpendiculaires et $\widehat{AEB} = \frac{\pi}{2}$

Deuxième méthode.

Voici une méthode trigonométrique. On note $\alpha = \widehat{ABE} = \widehat{EBC}$, $\beta = \widehat{BCE} = \widehat{ADE}$ et $\gamma = \widehat{AEB}$ et on exprime les longueurs des côtés qui nous intéressent en fonction de ces angles et de AB. Tout d'abord, on applique la loi des sinus dans le triangle BEC qui donne $BC = BE \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ et de même en raisonnant dans le triangle AED, on obtient $AD = AE \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\beta}$. Maintenant, on peut écrire la loi des sinus dans le triangle AEB pour exprimer les côtés AE et BE en fonction de AB. Il vient $AE = AB \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ et $BE = AB \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}$ soit :

$$BC = AB \cdot \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} \qquad \text{et} \qquad AD = AB \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta-\gamma)}{\sin\beta}$$

On est finalement ramené à prouver que $\gamma = \frac{\pi}{2}$ si, et seulement si on a l'identité :

$$\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta-\gamma) = \sin\beta\sin\gamma$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta-\gamma) \\
&\qquad = \sin(\alpha+\beta)[\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma] + \sin\alpha[\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma] \\
&\qquad = 2\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma
\end{aligned}$$

Ainsi l'identité précédente se réécrit $\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\cos\gamma = 0$. L'équivalence est alors immédiate puisque ni $\sin\alpha$, ni $\sin(\alpha+\beta)$ ne peuvent s'annuler, comme on le constate facilement.