

Corrigé de l'envoi 5 — 2003 / 2004

Problème 1 :

Des enfants sont assis en cercle, et disposent chacun d'un nombre pair de bonbons. Simultanément, chaque enfant donne la moitié de ses bonbons à son voisin de droite. Si après ce partage l'un des enfants a un nombre impair de bonbons, Dolphi lui en donne un de plus. Prouver qu'au bout d'un nombre fini de telles opérations, les enfants auront tous le même nombre de bonbons.

Notre solution :

Soit $2M$ le nombre de bonbons dont dispose initialement le ou les enfants qui en ont le plus. Alors on voit par récurrence sur les étapes successives qu'aucun enfant n'aura jamais plus de $2M$ bonbons. En effet, considérons un enfant quelconque. Il possède à une certaine étape $2a$ bonbons, et son voisin de gauche en a $2b$, avec, par hypothèse de récurrence, a et b plus petits que M . Alors à l'étape suivante, il en aura $a + b \leq 2M$ si cette somme est paire, et $a + b + 1$ sinon. Mais dans ce dernier cas, $a + b$ est impair et inférieur à $2M$, donc $a + b \leq 2M - 1$ et le résultat demeure.

Montrons par ailleurs que, tant que tous les enfants n'ont pas le même nombre de bonbons, si $2m$ est à une étape donnée le nombre de minimal de bonbons que l'un d'entre eux possède, ils en auront tous strictement plus que $2m$, au plus N étapes plus tard, où N est le nombre d'enfants.

Il suffit en effet de remarquer qu'un enfant qui possède $2a > 2m$ bonbons en a encore strictement plus que $2m$ après le partage (puisque son voisin de gauche en a au moins $2m$), et que par ailleurs, parmi les enfants possédant exactement $2m$ bonbons, l'un au moins en aura strictement plus à l'étape suivante : comme tous les enfants n'ont pas $2m$ bonbons, l'un des enfants ayant $2m$ bonbons a pour voisin de gauche un enfant en possédant strictement plus. Ainsi, d'une étape à l'autre, le nombre d'enfants possédant exactement $2m$ bonbons diminue, et il n'en restera donc plus au bout de N étapes au plus.

Par conséquent, si l'on suppose que les enfants n'ont jamais tous le même nombre de bonbons et que l'on considère les groupes successifs de N étapes, alors le nombre minimal de bonbons est une suite strictement croissante d'entiers, mais elle est majorée par $2M$, ce qui est absurde. Donc au bout d'un nombre fini d'étapes, tous les enfants auront le même nombre de bonbons.

Corrigé de l'envoi 5 — 2003 / 2004

Problème 2 :

On suppose que a, b, c sont des réels tels que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) de réels strictement positifs, on ait :

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^a \left(\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}\right)^b \left(\frac{x_1^3 + \dots + x_n^3}{n}\right)^c \geq 1$$

Montrer qu'il existe des réels positifs λ, μ tels que :

$$(a, b, c) = \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, -2, 1)$$

Notre solution :

En choisissant $n = 1$, on voit que pour tout réel $x > 0$, $x^{a+2b+3c} \geq 1$, donc $a + 2b + 3c = 0$. Si l'on pose alors $\mu = c$ et $\lambda = b + 2c$, il vient bien $b = \lambda - 2\mu$ et $a = -2b - 3c = -2\lambda + \mu$, c'est-à-dire :

$$(a, b, c) = \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, -2, 1)$$

Il s'agit donc de montrer que λ et μ sont positifs.

Pour cela, $x > 0$ un réel quelconque. En choisissant $n = 2$, $x_1 = 1$ et $x_2 = x$, il vient :

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^a \left(\frac{1+x^2}{2}\right)^b \left(\frac{1+x^3}{2}\right)^c \geq 1$$

donc en faisant tendre x vers 0, on obtient $(1/2)^{a+b+c} \leq 1$, d'où $a+b+c \geq 0$. Ainsi $\lambda = b+2c = (a+2b+3c) - (a+b+c) \geq 0$.

Par ailleurs, soit $n \geq 2$ un entier quelconque et $x > 0$ un réel. En prenant $x_1 = \dots = x_{n-1} = 1 - x$ et $x_n = 1 + (n-1)x$, on obtient :

$$(1 + (n-1)x^2)^b (1 + 3(n-1)x^2 + (n-2)(n-1)x^3)^c \geq 1$$

Si l'on choisit alors $x = 1/\sqrt{n-1}$, il vient, pour tout $n \geq 2$, $(4 + \frac{n-2}{\sqrt{n-1}})^c \geq 2^{-b}$, et ainsi $(4 + \frac{n-2}{\sqrt{n-1}})^c$ est minoré indépendamment de n , et ne peut en particulier pas tendre vers 0 pour $n \rightarrow +\infty$. Comme $4 + \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}$ a pour limite $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, il en résulte que $\mu = c \geq 0$.

On a ainsi montré que (a, b, c) s'écrivait sous la forme $\lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, -2, 1)$ avec λ et μ réels positifs.

On peut noter que la réciproque est vraie, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité entre moyennes arithmétiques et quadratiques : voir le cours sur les inégalités, disponible sur la page web de l'Olympiade, <<http://www.animath.fr/tutorat.html>>.

Corrigé de l'envoi 5 — 2003 / 2004

Problème 3 :

Soit $r \geq 2$ un entier donné, et F un ensemble infini d'ensembles à r éléments, deux à deux d'intersection non vide. Montrer qu'il existe un ensemble à $r - 1$ éléments qui a une intersection non vide avec chacun des ensembles appartenant à F .

Notre solution :

Montrons tout d'abord le lemme suivant : si A est un ensemble qui est inclus dans une infinité d'ensembles appartenant à F , alors ou bien A rencontre tous les éléments de F , ou bien il existe $x \notin A$ tel que $A \cup \{x\}$ est encore inclus dans une infinité d'ensembles de F . En effet, s'il existe $R = \{x_1, \dots, x_r\}$ dans F qui ne rencontre pas A , chaque élément S de F qui contient A rencontre R , donc l'un des x_i est dans S . Comme il existe une infinité de tels ensembles S et seulement un nombre fini de x_i , l'un des x_i appartient à une infinité d'entre eux, et alors $A \cup \{x_i\}$ est bien inclus dans une infinité d'ensembles de F .

Cela étant, on peut remarquer que l'ensemble vide est inclus dans tous les éléments de F , et que par ailleurs, un ensemble à r éléments ou plus ne saurait être contenu dans plus d'un seul élément de F . En appliquant le lemme précédent r fois successivement en partant de l'ensemble vide, on obtient donc un ensemble A à $r - 1$ éléments ou moins qui a une intersection non vide avec tous les éléments de F . Quitte à ajouter des éléments quelconques à A , on peut toujours supposer, de plus, qu'il est de cardinal exactement $r - 1$, ce qui conclut.

Corrigé de l'envoi 5 — 2003 / 2004

Problème 4 :

On considère deux partitions (A, B) et (C, D) de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2n\}$ en parties à n éléments. Pour $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$, on note $f(k)$ le nombre de couples (a, c) avec a dans A et c dans C tels que $a + c \equiv k \pmod{2n}$, et $g(k)$ le nombre analogue pour B et D . Montrer que l'on a $f(k) = g(k)$ pour tout k .

Notre solution :

Notons $h(k)$ le nombre de couples (a, d) avec a dans A et d dans D tels que $a + d \equiv k \pmod{2n}$. Soit alors k fixé parmi $0, 1, \dots, 2n - 1$. Pour chaque a dans A , $k - a$ est congru modulo $2n$ à un et un seul élément de $\{1, 2, \dots, 2n\}$, qui est ou bien dans C , ou bien dans D . Il en résulte que $f(k) + h(k)$ est le nombre de couples (a, x) avec a dans A et x l'unique entier de $\{1, 2, \dots, 2n\}$ tel que $a + x \equiv k \pmod{2n}$, d'où $f(k) + h(k) = n$.

De la même manière, $g(k) + h(k)$ est le nombre de couples (x, d) avec d dans D et x l'unique entier de $\{1, 2, \dots, 2n\}$ tel que $x + d \equiv k \pmod{2n}$, donc $g(k) + h(k) = n$. On obtient donc bien, pour tout k :

$$f(k) = n - h(k) = g(k)$$

Corrigé de l'envoi 5 — 2003 / 2004

Problème 5 :

Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers $x, y > 0$ avec $\text{PGCD}(x, n+1) = 1$ et $x^n + 1 = y^{n+1}$.

Notre solution :

La relation $x^n + 1 = y^{n+1}$ s'écrit encore :

$$x^n = (y-1)(1+y+\cdots+y^n) \tag{1}$$

Dès lors, si p est un diviseur premier de $y-1$, p divise x , et donc ne divise pas $n+1$, qui est premier avec x . Mais on a :

$$1+y+\cdots+y^n \equiv n+1 \pmod{y-1}$$

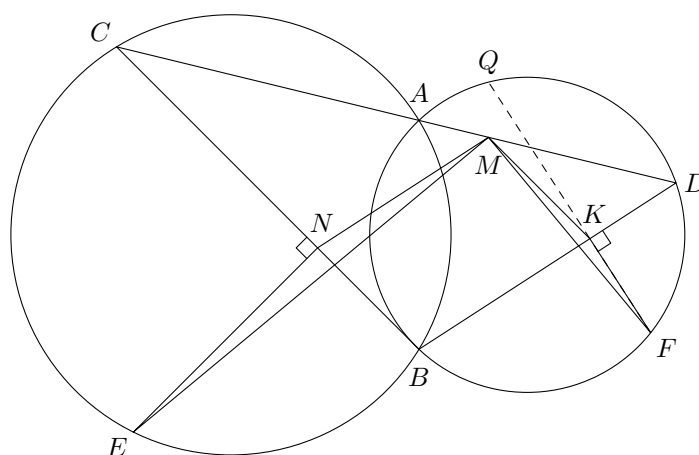
et par conséquent p ne divise pas non plus $1+y+\cdots+y^n$. Ainsi, $y-1$ et $1+y+\cdots+y^n$ sont premiers entre eux. Il en résulte, d'après (1), que $1+y+\cdots+y^n$ est une puissance n -ième. Mais c'est impossible, puisque c'est un entier strictement compris entre les deux puissances n -ièmes consécutives y^n et $(y+1)^n$: c'est la contradiction recherchée.

Corrigé de l'envoi 5 — 2003 / 2004

Problème 6 :

Soit S_1 et S_2 deux cercles qui se rencontrent aux points A et B . Une droite passant par A recoupe S_1 en C et S_2 en D . On considère des points M, N, K sur les segments $[CD]$, $[BC]$ et $[BD]$ respectivement, tels que (MN) soit parallèle à (BD) et (MK) à (CB) . Soit E (resp. F) un point de l'arc \widehat{BC} de S_1 (resp. de l'arc \widehat{BD} de S_2) qui ne contient pas A . Si (EN) est perpendiculaire à (BC) et (FK) à (BD) , montrer que \widehat{EMF} est un angle droit.

Notre solution :



La figure suggère que les triangles ENM et MKF sont semblables, ce qui permet de conclure rapidement. Or cela résulte du lemme suivant :

Lemme. Soit $P_1Q_1R_1$ et $P_2Q_2R_2$ deux triangles avec $\widehat{P_1Q_1R_1} = \widehat{P_2Q_2R_2}$. On note T_1 et T_2 les pieds des hauteurs issues de Q_1 et Q_2 . Alors si $P_1T_1/T_1R_1 = P_2T_2/T_2R_2$, les triangles $P_1Q_1R_1$ et $P_2Q_2R_2$ sont semblables.

Démonstration. Soit Q'_2 le point du cercle circonscrit à $P_2Q_2R_2$ sur l'arc $\widehat{P_2R_2}$ contenant Q_2 et tel que $P_2Q'_2R_2$ soit semblable à $P_1Q_1R_1$. Si l'on note T'_2 le pied de la hauteur issue de Q'_2 dans $P_2Q'_2R_2$, on a $P_2T'_2/T'_2R_2 = P_1T_1/T_1R_1 = P_2T_2/T_2R_2$, donc $T'_2 = T_2$ et $Q'_2 = Q_2$. \square

Dans le cas qui nous intéresse, on a, d'après le théorème de Thalès, $BN/NC = DM/MC = DK/KB$. En outre, si l'on note Q le point où (FK) recoupe le cercle S_2 (de sorte que Q est sur le même arc \widehat{BC} que A), on a $\widehat{BQD} = \widehat{BAD} = \widehat{BEC}$. Les triangles BEC et DQB vérifient donc les hypothèses du lemme, et sont par conséquent semblables. Par suite, $\widehat{EBC} = \widehat{QDB} = \widehat{QFB} = \widehat{KFB}$, et les triangles rectangles BNE et FKB sont semblables.

Comme $MKBN$ est un parallélogramme, $\widehat{MNB} = \widehat{MKB}$ et donc $\widehat{ENM} = \widehat{MKF}$. De plus, $MN/KF = BK/KF = EN/NB = EN/MK$. Il en résulte enfin que ENM et MKF sont semblables, et donc $\widehat{NME} = \widehat{KFM}$. Comme (MN) et (KF) sont perpendiculaires, il en va de même pour (EM) et (FM) .