Corrigé de l'envoi 3 — 2003 / 2004

Problème 1 :

Déterminer les polynômes P à coefficients réels vérifiant la propriété suivante : pour tout réel x, si $P(x)$ est entier, alors $P(x+1)$ l'est aussi.

Notre solution :

Tout polynôme constant convient trivialement. Soit donc P non constant vérifiant l'hypothèse de l'énoncé, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, X_n l'ensemble des réels de $[n, n+1[$ en lesquels P prend une valeur entière. Pour tout n, X_n est fini : en effet, P est borné sur $[n, n+1[$, et ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs entières distinctes. S'il est entier en une infinité de points, c'est qu'il prend l'une au moins de ces valeurs une infinité de fois, et qu'il est donc constant, ce qu'on a exclu.

Considérons alors l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à n associe le nombre d'éléments de X_n. Si $x \in X_n$, $x+1 \in X_{n+1}$ par hypothèse, donc X_{n+1} a au moins autant d'élements que X_n. Par conséquent, φ est croissante. Si l'on note m sa valeur minimum, il existe donc $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \leqslant n_0$, $\varphi(n) = m$. Comme P est continu et tend vers $\pm\infty$ en $-\infty$, il prend nécessairement des valeurs entières sur tout intervalle $]-\infty, n[$, donc m n'est pas nul.

Par ailleurs, il existe un intervalle de la forme $]-\infty, n_0'[$ sur lequel P est strictement monotone, par exemple strictement croissante. Soit alors $n < \min(n_0, n_0')$ quelconque, et posons $X_n = \{x_1, \ldots, x_m\}$, avec $n \leqslant x_1 < \cdots < x_m < n+1$. On a nécessairement $X_{n-1} = \{x_1 - 1, \ldots, x_m - 1\}$, et les entiers $P(x_1 - 1), \ldots, P(x_m - 1), P(x_1), \ldots, P(x_m)$ sont distincts, rangés dans cet ordre, et consécutifs par continuité du polynôme P. En particulier, $P(x) = P(x-1) + m$ pour tout $x \in X_n$. Comme ceci est vrai pour tout n assez petit, le polynôme $Q(x) = P(x) - P(x-1)$ prend une infinité de fois la valeur m, donc est constant égal à m, et ainsi P est de la forme $mX + b$ pôur un certain réel b. De même, si P était strictement décroissant au voisinage de $-\infty$, on aurait trouvé qu'il était de la forme $-mX + b$ pour un certain b. Réciproquement, tous ces polynômes conviennent évidemment.

Finalement, les polynômes recherchés sont les $aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ quelconque.

Corrigé de l'envoi 3 — 2003 / 2004

Problème 2 :

Soit A, B, C, D quatre points de l'espace. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que toute sphère passant par A et B rencontre toute sphère passant par C et D.

Notre solution :

Supposons que toute sphère passant par A et B rencontre toute sphère passant par C et D. Alors on peut déjà affirmer que les points A, B, C, D sont coplanaires. En effet, dans le cas contraire, il existe un plan Π orthogonal à la perpendiculaire commune à (AB) et (CD), tel que (AB) et (CD) soient de part et d'autre de Π strictement. Mais il est immédiat que par deux points d'un demi-espace ouvert, il passe une sphère entièrement contenue dans ce demi-espace, ce qui conclut.

Nous sommes donc ramenés au problème analogue dans le plan : à quelle condition quatre point A, B, C, D coplanaires sont-ils tels que, dans le plan Π qu'ils définissent, tout cercle passant par A et B coupe tout cercle passant par C et D ? Si c'est le cas, bien sûr, il en va de même pour les sphères, et réciproquement, s'il existe deux cercles disjoints de Π passant par A et B d'une part, C et D d'autre part, ils sont grands cercles de deux sphères disjointes symétriques par rapport à Π ayant la même propriété.

Cela étant, notons que si les segments $[AB]$ et $[CD]$ étaient disjoints, l'argument précédent sur les demi-espaces ouverts s'appliquerait encore. Plus précisément, dans le plan, les deux segments seraient séparés par une droiteă : ou bien (AB) ne coupe pas le segment $[CD]$, auquel cas une parallèle à (AB) assez proche convient, ou bien (CD) ne coupe pas $[AB]$, et on peut alors choisir une parallèle à (CD), ou bien les quatre points sont alignés, et alors une perpendiculaire bien choisie convient.

Par conséquent, $[AB]$ et $[CD]$ se coupent, et en particulier, les droites (AB) et (CD) sont sécantes ou confondues.

Si elles sont confondues, c'est que A, B, C, D sont alignés, et en considérant les cercles de diamètres $[AB]$ et $[CD]$, on obtient de plus que sur la droite, l'un des points C ou D est sur le segment $[AB]$, et l'autre en dehors.

Si à l'inverse (AB) et (CD) sont sécantes, alors il en va de même des médiatrices de $[AB]$ et $[CD]$. Soit O leur point d'intersection. Le cercle Γ de centre O passant par A passe aussi par B, et le cercle Γ' de centre O passant par C passe aussi par D. Donc Γ et Γ' se coupent, et comme ils sont concentriques, ils sont confondus : ainsi les points A, B, C, D sont cocycliques. De plus, comme $[AB]$ et $[CD]$ se coupent, le quadrilatère $ABCD$ est croisé, et donc A, C, B, D sont dans cet ordre sur Γ.

Une condition nécessaire pour que quatre points A, B, C, D de l'espace vérifient l'hypothèse qui nous intéresse est donc qu'ils soient alignés ou cocycliques et que l'un des points C ou D soit sur le segment $[AB]$ (resp. l'arc $\widehat{AB}$), et l'autre en dehors. Montrons que c'est en fait suffisant.

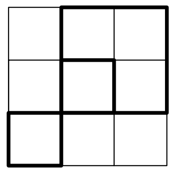
En effet, si par exemple A, C, B, D sont alignés dans cet ordre, et $\mathcal{C}$ est un cercle passant par A et B, alors C est à l'intérieur de $\mathcal{C}$ et D est à l'extérieur. Par conséquent, tout arc continu de C à D traverse $\mathcal{C}$, et en particulier tout arc de cercle. Le même raisonnement s'applique au cas où A, C, B, D sont dans cet ordre sur un cercle Γ : pour tout cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B, C et D sont de part et d'autre de $\mathcal{C}$ (dessus dans le cas limite où $\mathcal{C} = \Gamma$), et donc tout cercle passant par C et D coupe $\mathcal{C}$.

Finalement, toute sphère passant par A et B coupe toute sphère passant par C et D si et seulement si A, B, C, D sont alignés ou cocycliques et que l'un des points C ou D soit sur le segment $[AB]$ (resp. l'arc $\widehat{AB}$), et l'autre en dehors.

Corrigé de l'envoi 3 — 2003 / 2004

Problème 3 :

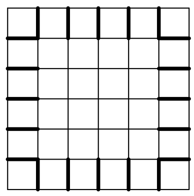
Sur une grille $n \times n$, on repasse les côtés d'un certain nombre de carrés. Sur la figure ci-contre on a ainsi représenté le cas de trois carrés tracés sur un grillage 3×3.



Déterminer le nombre minimal de carrés qu'il faut tracer pour repasser toutes les arêtes de la grille.

Notre solution :

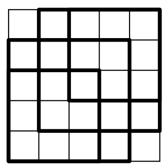
Considérons les $4(n-1)$ points du bord de la grille autres que les coins. Chaque tel point est nécessairement sommet d'un des carrés tracés : c'est en effet la seule façon de repasser l'arête qui part de ce point vers l'intérieur de la grille.



Or un carré tracé sur le grillage ne peut évidemment pas avoir plus de deux de ces points pour sommet, donc le lemme des tiroirs donne une minoration du nombre de carrés à tracer : il en faut au minimum $2(n-1)$. On va voir qu'en fait, ce nombre suffit, sauf dans les cas triviaux $n = 1$ et $n = 2$ (pour $n = 1$, il faut bien sûr tracer 1 carré et pour $n = 2$, il en faut au minimum 3, comme on le voit aisément).

Supposons dorénavant $n \geqslant 3$. On va construire une façon de repasser la grille en $2(n-1)$ carrés.

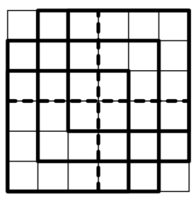
Tout d'abord, supposons $n = 2p+1$ impair, et repassons tous les carrés ayant un des coins de la grille pour sommet, et d'arête $p+1$, ..., $2p-1$ et $2p$. Il y a bien $4p = 2(n-1)$ tels carrés, et ils recouvrent entièrement la grille (on a tracé la moitié de ces carrés sur la figure ci-contre). En effet, identifions les points de la grille à $\{0, ..., n\}^2$. L'arête reliant $(x, y-1)$ et (x, y) est sur le carré de diamètre :



– $(0,0) - (x,x)$ si $n/2 < x < n$ et $y \leqslant x$
– $(0,n) - (x, n-x)$ si $n/2 < x < n$ et $y > x$
– $(n,0) - (x, n-x)$ si $0 < x < n/2$ et $y \leqslant x$
– $(n,n) - (x,x)$ si $0 < x < n/2$ et $y > x$

Comme en outre toutes les arêtes du bord de la grille sont bien tracées, et que les arêtes horizontales se traitent de manière analogue, on a effectivement gagné.

Considérons ensuite le cas $n = 2p$ pair, et repassons de la même manière les carrés ayant un des coins de la grille pour sommet, et d'arête $p+1$,...,$2p-1$. Il y en a $4(p-1) = 2(n-2)$, et on vérifie comme précédent que toutes les arêtes sont tracées, *sauf* les arêtes portées par les deux segments à $x = n/2$ et à $y = n/2$. Or ces deux segments sont recouverts par deux carrés de côté p ayant deux sommets opposés de la grille pour sommets, ce qui conclut.



Finalement, le nombre minimal de carrés est 1 pour $n = 1$, 3 pour $n = 2$, et $2(n-1)$ pour tout $n \geqslant 3$.

Corrigé de l'envoi 3 — 2003 / 2004

Problème 4 :

Est-il possible de colorier chaque entier $\geqslant 1$ soit en rouge, soit en vert, de telle manière qu'il n'existe aucune progression arithmétique monochrome ?

Notre solution :

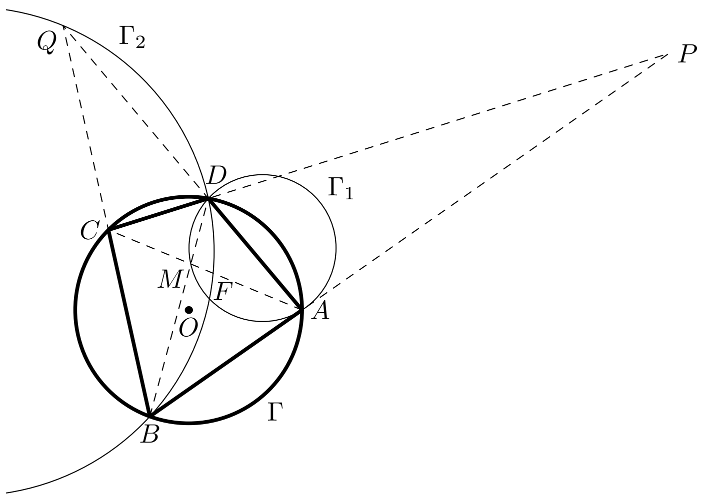
Oui. Par exemple, on colorie successivement, en partant de 1, un entier en rouge et un en vert, puis deux en rouge et deux en vert, puis trois en rouge et trois en vert, et ainsi de suite. S'il existait une progression arithmétique de raison r d'entiers tous rouges, alors à partir d'un certain rang, on ne pourrait pas trouver plus de $r-1$ entiers verts consécutifs, ce qui est absurde vu notre construction.

Corrigé de l'envoi 3 — 2003 / 2004

Problème 5 :

Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit dans un cercle de centre O. La droite (AB) recontre (CD) en P, (AD) rencontre (BC) en Q et (AC) rencontre (BD) en M. Montrer que O est l'orthocentre du triangle PQM.

Notre solution :



Soit R le rayon du cercle Γ circonscrit à $ABCD$. Puisque M est sur $[BD]$, on a :

$$\widehat{QMD} > \widehat{QBD} = \widehat{CBD} = \widehat{DAC} = \widehat{DAM}$$

On peut alors prolonger $[QM]$ en $[QF]$ où $\widehat{FAD} = \widehat{QMD}$, et dans ces conditions, les points A, D, M, F appartiennent à un même cercle Γ_1, dans cet ordre.

Par suite, on a aussi $\widehat{QBD} = \widehat{DAM} = \widehat{DFM}$, ce qui assure que B, F, D, Q appartiennent également à un même cercle Γ_2.

On en déduit que :

– l'axe radical de Γ et Γ_1 est (AD), et puisque Q est sur (AD), il vient

$$QM \cdot QF = QD \cdot QA = QO^2 - R^2$$

– l'axe radical de Γ et Γ_2 est (BD), et puisque M est sur (BD), il vient

$$MQ \cdot MF = MD \cdot MB = R^2 - MO^2$$

Par suite, $QM^2 = QM \cdot (QF - MF) = QO^2 + MO^2 - 2R^2$. Et l'on prouve de même que $PM^2 = PO^2 + MO^2 - 2R^2$.

Mais alors $PM^2 - QM^2 = PO^2 - QO^2$, ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QM}) \cdot (\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{QM}) &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{QO}) \cdot (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OQ}) \\
(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QM}) \cdot \overrightarrow{PQ} &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{QO}) \cdot \overrightarrow{PQ} \\
2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0
\end{aligned}$$

ce qui prouve que (OM) et (PQ) sont perpendiculaires et donc que O appartient à la hauteur issue de M dans PQM.

On prouve de même que O appartient aux deux autres hauteurs issues de PQM, et donc que O est l'orthocentre de PQM.

Corrigé de l'envoi 3 — 2003 / 2004

Problème 6 :

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer qu'il existe au plus un diviseur d de n vérifiant :

$$n^{1/2} \leqslant d \leqslant n^{1/2} + n^{1/4}$$

Notre solution :

Supposons par l'absurde qu'il existe deux diviseurs a, b de n qui vérifient $\sqrt{n} \leqslant a < b \leqslant \sqrt{n} + \sqrt[4]{n}$.

On pose $n = bc$. Ainsi $c \leqslant \sqrt{n}$. Si par ailleurs $c \leqslant \sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$, alors $n = bc \leqslant (\sqrt{n} + \sqrt[4]{n})(\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}) = n - \sqrt{n} < n$, ce qui est absurde. Par conséquent :

$$\sqrt{n} - \sqrt[4]{n} < c \leqslant \sqrt{n}$$

Soit alors $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $d' = \text{PGCD}(a, c)$. Notons que d divise $b - a$, et donc que $1 \leqslant d \leqslant b - a$. De même $1 \leqslant d' \leqslant a - c$. Par suite :

$$1 \leqslant \sqrt{dd'} \leqslant \sqrt{(b-a)(a-c)} \leqslant \frac{(b-a)+(a-c)}{2} = \frac{b-c}{2} < \sqrt[4]{n}$$

d'où $dd' < \sqrt{n}$.

Écrivons alors $a = da' = d'a''$, $b = db'$ et $c = d'c''$, avec $\text{PGCD}(a', b') = 1$ et $\text{PGCD}(a'', c'') = 1$. Comme $a = da'$ divise $n = bc = dd'b'c''$, on en déduit que a' divise $d'b'c''$, et donc, par le théorème de Gauss, qu'il divise $d'c''$.

Par conséquent $d'a'' = a = da'$ divise $dd'c''$ ce qui, comme ci-dessus, permet d'affirmer que a'' divise d. Mais alors a divise dd', et donc $a \leqslant dd' < \sqrt{n}$: contradiction !

Toute l'équipe de l'Olympiade vous souhaite une excellente année 2004 (sauf μ, qui vous souhaite une tout aussi excellente année $2^2 \cdot 3 \cdot 167$).