

## Corrigé de l'envoi 2 — 2003 / 2004

### Problème 1 :

On part de  $n = 2$ . À tour de rôle, Alice (la première) et Bob ajoutent un diviseur  $0 < d < n$  du nombre  $n$  qui est inscrit au moment où ils jouent (et laissent donc  $n + d$ ).

- (a) Le premier qui fait dépasser  $2003^{2004}$  perd. Qui a une stratégie gagnante ?
  - (b) Le premier qui fait dépasser  $2004^{2003}$  perd. Qui a une stratégie gagnante ?
- 

### Notre solution :

On note que bien évidemment le jeu est obligé de se terminer puisqu'à chaque coup, le nombre inscrit augmente d'au moins une unité.

- (a) C'est Alice qui possède une stratégie gagnante.

Par exemple, en choisissant  $d = 1$  à chaque coup. En effet, supposons qu'à un tour donné, elle doit choisir un diviseur d'un nombre  $n$  pair qui n'est pas plus grand que  $2003^{2004}$ . En choisissant  $d = 1$ , elle laisse donc  $n + 1$  qui est impair et toujours pas plus grand que  $2003^{2004}$ . Ainsi, Bob doit jouer, et ne peut choisir qu'un diviseur impair. De deux choses l'une : soit il fait dépasser  $2003^{2004}$  et perd. Soit il laisse à Alice un nombre pair qui n'est pas plus grand que  $2003^{2004}$ . Une récurrence implacable permet alors de conclure.

- (b) En fait, c'est toujours Alice qui a une stratégie gagnante, et ce quelle que soit la borne à ne pas dépasser du moment qu'elle est supérieure à 6. Il faut commencer par remarquer qu'à son premier tour Alice est obligée de choisir  $d = 1$  et donc de laisser  $n = 3$ . Cela oblige également Bob à choisir  $d = 1$  et à laisser  $n = 4$ . À partir de là, deux options sont possibles pour Alice : laisser  $n = 5$  ou  $n = 6$ .

Par l'absurde : supposons que Bob ait une stratégie gagnante. Alors, en particulier, si Alice laisse  $n = 5$ , Bob qui est obligé de laisser  $n = 6$  va gagner. Ainsi, le joueur qui laisse  $n = 6$  gagne. Mais, en laissant directement  $n = 6$  Alice peut décider d'être ce joueur, et donc peut gagner la partie. Contradiction.

Par suite, Bob n'a pas de stratégie gagnante, et c'est donc Alice qui en a une. Par contre, à la différence du (a), sauf à étudier toutes les parties possibles, on n'a pas de description simple d'une telle stratégie.

**Remarque.** Il s'agit ici d'un jeu fini à deux joueurs et à information complète et sans partie nulle possible. Alors un des joueurs possède forcément une stratégie gagnante. On pourra se reporter à l'article de Thomas Chomette sur les jeux, disponible sur <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>.

## Corrigé de l'envoi 2 — 2003 / 2004

### Problème 2 :

- (a) Déterminer tous les entiers  $n > 0$  pour lesquels l'équation  $(a^a)^n = b^b$  admet au moins une solution en entiers  $a, b > 1$ .
- (b) Déterminer tous les entiers  $a, b > 0$  tels que  $(a^a)^5 = b^b$
- 

### Notre solution :

- (a) Tous les entiers  $n \geq 1$  conviennent, sauf  $n = 2$ . En effet :
- Si  $n = 1$ , il suffit de choisir  $a = b = 2$ . Et si  $n \geq 3$ , il suffit de choisir  $a = (n - 1)^{n-1}$  et  $b = (n - 1)^n$ .
  - Par l'absurde, supposons qu'il existe des entiers  $a, b \geq 2$  tels que

$$(a^a)^2 = b^b \tag{1}$$

Une telle relation montre que tout nombre premier qui divise  $a$  divise également  $b$ . On peut aussi noter que si  $b \leq a$  alors  $b^b \leq a^a < (a^a)^2$ , et que si  $b \geq 2a$  alors  $b^b \geq (2a)^{2a} = 2^{2a}(a^a)^2 > (a^a)^2$ . Par suite, on doit avoir  $a < b < 2a$ .

Soit donc  $p$  un nombre premier qui divise  $a$  (et donc  $b$ ). On note  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) l'exposant de  $p$  dans la décomposition de  $a$  (resp. de  $b$ ) en facteurs premiers. La relation (1) conduit alors à  $2a\alpha = b\beta$ , c'est-à-dire  $\alpha/\beta = b/2a < 1$ , et donc  $\alpha < \beta$ .

Par suite, tout nombre premier qui divise  $a$  divise également  $b$  et ce, selon une puissance supérieure. Cela entraîne que  $b$  est un multiple de  $a$  ce qui est impossible puisque  $a < b < 2a$  : contradiction !

Finalement,  $n = 2$  n'est pas une solution du problème.

- (b) On a déjà la solution évidente  $(1, 1)$ .

Supposons maintenant que  $a, b \geq 2$  soient des entiers tels que

$$(a^a)^5 = b^b \tag{2}$$

La démarche du (a) s'adapte en tout point pour prouver que  $a < b < 5a$  et que  $a$  divise  $b$ . Par suite,  $b = ka$  où  $k \in \{2, 3, 4\}$ , et (2) s'écrit  $a^{5a} = (ka)^{ka}$ , c'est-à-dire  $a^{5-k} = k^k$ .

- Pour  $k = 2$ , cela conduit à  $a^3 = 4$ , ce qui est impossible.
- Pour  $k = 3$ , il vient  $a^2 = 27$ , ce qui est toujours impossible.
- Et si  $k = 4$ , on obtient  $a = 4^4$  puis  $b = 4^5$ , et on vérifie qu'ils forment effectivement une solution de (2).

Finalement, les solutions sont  $(1, 1)$  et  $(4^4, 4^5)$ .

## Corrigé de l'envoi 2 — 2003 / 2004

### Problème 3 :

Soient  $k$  points dans le plan. Chacun d'entre eux est l'origine d'un certain nombre de demi-droites. Deux quelconques de ces demi-droites n'ont aucun point en commun (sauf, éventuellement, leur origine). Prouver qu'il est possible de tracer  $k - 1$  segments dont les extrémités sont parmi les  $k$  points, de sorte qu'un quelconque de ces segments ne rencontre ni un autre des segments ni l'une des demi-droites sauf, éventuellement, en un des  $k$  points.

---

### Notre solution :

On va utiliser la théorie des graphes (voir cours disponible à <http://www.animath.fr/>).

Pour  $k \geq 1$ , on note  $\mathcal{P}_k$  la proposition suivante : « pour toute configuration de  $k$  points du plan dont sont issues des demi-droites satisfaisant les conditions de l'énoncé, il est possible de tracer des segments dont les extrémités sont parmi les  $k$  points de façon à obtenir un graphe simple connexe et planaire, dont les sommets sont tous les  $k$  points et les arêtes ne sont traversées par aucune des demi-droites ».

Dans ce qui suit, un tel graphe sera appelé un *bon* graphe.

Notons tout de suite que la conclusion désirée découlera directement de la preuve que  $\mathcal{P}_k$  est vraie, puisqu'il est bien connu (voir référence ci-dessus) qu'un graphe connexe à  $k$  sommets possède au moins  $k - 1$  arêtes.

On prouve donc  $\mathcal{P}_k$ , par récurrence sur  $k$ .

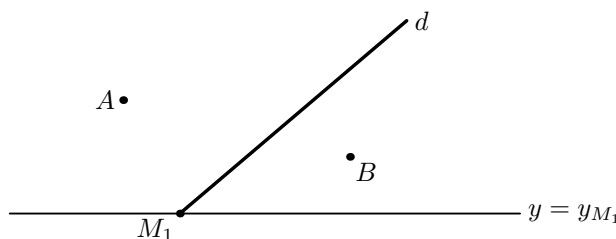
- Pour  $k = 1$ , il n'y a rien à faire. Et, pour  $k = 2$ , la conclusion découle immédiatement de l'énoncé puisque le segment reliant les deux points n'est coupé par aucune des demi-droites issues de ces deux points.

- On se donne donc un entier  $k \geq 3$ , pour lequel on suppose que  $\mathcal{P}_q$  est vraie pour tout  $q \leq k - 1$ . Et on se donne une configuration à  $k$  points satisfaisant les conditions de l'énoncé. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points, ceux-ci ne déterminent deux à deux qu'un nombre fini de directions de droites, et donc on peut choisir un repère orthonormé dans lequel les  $k$  points ont des ordonnées deux à deux distinctes. On note alors  $M_1$  celui des points dont l'ordonnée est la plus petite.

Tous les autres points appartiennent donc au demi-plan ouvert d'équation  $y > y_{M_1}$ . Soit  $M_2$  celui dont l'ordonnée est la plus petite. Les autres points seront notés  $M_3, \dots, M_k$  mais on précisera le choix des indices au fur et à mesure.

Dans ce qui suit, on dira que la demi-droite  $d$  *sépare* les points  $A$  et  $B$  lorsque  $d$  intersecte  $]AB[$ .

**Premier cas :** une demi-droite  $d$  issue de  $M_1$  sépare deux des autres points, disons  $A$  et  $B$ .



D'après l'hypothèse de récurrence, on peut alors construire un bon graphe  $\mathcal{G}_1$  si l'on se restreint aux points situés du même côté de  $d$  que  $A$  ainsi que  $M_1$ , et un bon graphe  $\mathcal{G}_2$  si l'on se restreint aux points situés du même côté de  $d$  que  $B$  ainsi que  $M_1$ . Puisque deux demi-droites ne se rencontrent jamais, aucune des arêtes de  $\mathcal{G}_1$  (resp.  $\mathcal{G}_2$ ) n'est traversée par une des demi-droites issues des sommets de  $\mathcal{G}_2$  (resp.  $\mathcal{G}_1$ . Les arêtes sont « protégées » par  $d$ ). Du coup, le graphe  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$  est un bon graphe pour l'ensemble de tous les points.

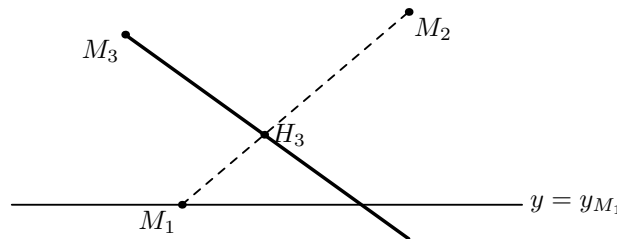
**Deuxième cas :** aucune demi-droite issue de  $M_1$  ne sépare deux autres des points.

L'hypothèse de récurrence nous assure de l'existence d'un bon graphe  $\mathcal{G}$  dont les sommets sont les  $k - 1$  points autres que  $M_1$ .

Dans ce qui suit, on dira que le point  $X$  sépare  $A$  et  $B$  lorsque  $X \in ]AB[$ , ou si l'une des demi-droites issues de  $X$  sépare  $A$  et  $B$ , ou si une arête de  $\mathcal{G}$  dont  $X$  est une des extrémités sépare  $A$  et  $B$ .

Notons que, d'après la minimalité de  $M_1$  et l'hypothèse qui définit ce cas, le point  $M_1$  ne sépare aucune paire de points. Il suffit donc de prouver que  $M_1$  peut être joint à un autre des points par un segment de façon à former un bon graphe sur l'ensemble de tous les points.

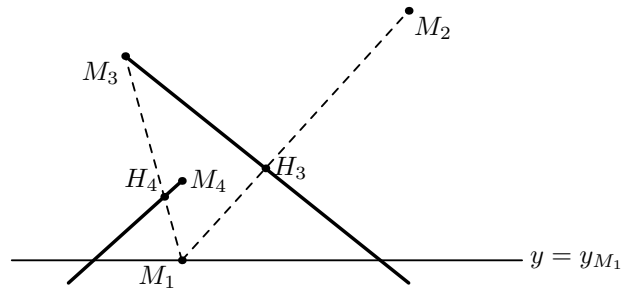
D'après la minimalité de  $M_1$  et  $M_2$ , aucun des autres points n'appartient à  $]M_1M_2[$ , et aucune arête de  $\mathcal{G}$  ne sépare  $M_1$  et  $M_2$ . Si  $]M_1M_2[$  n'est traversé par aucune des demi-droites, alors  $M_1$  et  $M_2$  peuvent être joints par une arête et c'est fini. Sinon, c'est qu'il existe une demi-droite issue d'un autre point que  $M_1$  et  $M_2$  qui traverse  $]M_1M_2[$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de demi-droites, celles-ci ne définissent qu'un nombre fini de points d'intersection avec  $]M_1M_2[$ . On note  $M_3$  le point dont est issue la demi-droite, notée  $d_3$ , qui rencontre  $]M_1M_2[$  en un point noté  $H_3$ , avec  $M_1H_3$  minimale (fig. 2). On peut alors remarquer que  $M_2$  est extérieur au triangle  $M_1M_3H_3$ , et on note  $n_3$  le nombre de  $M_i$  qui sont à l'intérieur ou sur les bords de ce triangle.



Si  $M_1$  et  $M_3$  peuvent être joints par une arête, c'est fini.

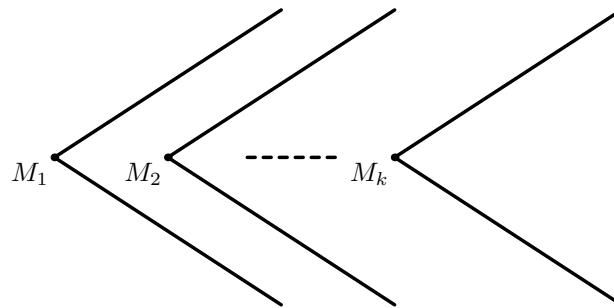
Sinon, d'après la minimalité de  $H_3$  (et celle  $M_2$ ), le segment ouvert  $]M_1H_3[$  n'est traversé par aucune arête ni aucune demi-droite. De plus, puisque  $]M_3H_3[ \subset d_3$  et qu'aucune demi-droite issue de  $M_3$  est coupée par une arête de  $\mathcal{G}$  (car  $\mathcal{G}$  est bon) ou par une autre demi-droite, on en déduit que toute demi-droite ou arête qui sépare  $M_1$  et  $M_3$  à l'une de ses extrémités à l'intérieur du triangle  $M_1M_3H_3$  ou sur  $]M_1M_3[$ . Donc soit aucune arête ni aucune demi-droite sépare  $M_1$  et  $M_3$ , mais alors ceux-ci sont uniquement séparés par certains des  $k$  points qui appartiennent à  $]M_1M_3[$ . Soit donc  $P$  celui de ces points pour lequel  $M_1P$  est minimal. D'après ci-dessus,  $M_1$  et  $P$  peuvent être joints par une arête et c'est fini.

Soit  $M_1$  et  $M_3$  sont séparés par une arête ou une demi-droite. D'après ci-dessus, sans perte de généralité, on peut alors supposer qu'ils sont séparés par une arête ou une demi-droite issue de  $M_4$ , qui rencontre  $]M_1M_3[$  en  $H_4$  avec  $M_1H_4$  minimal, et où  $M_4$  est à l'intérieur de  $M_1M_3H_3$  ou sur  $]M_1M_3[$ . On note alors que le triangle  $M_1M_4H_4$  est inclus dans  $M_1M_3H_3$  (fig. 3) et que  $M_3$  est à l'extérieur de  $M_1M_4H_4$ . Par suite, si  $n_4$  désigne le nombre de  $M_i$  qui sont à l'intérieur ou sur le bord de  $M_1M_4H_4$ , alors  $n_4 < n_3$ .



Le raisonnement ci-dessus s'adapte alors mot à mot (on remplace tous les indices 3 en 4), et en répétant si besoin cette construction, on met ainsi en évidence une suite strictement décroissante d'entiers positifs (la suite des  $n_i$ ). Cela assure que cette procédure va se terminer après un nombre fini d'étapes, et donc que l'on aura identifié un des  $M_i$  qui peut être joint à  $M_1$  de façon à construire le bon graphe cherché. Cela achève la récurrence et la démonstration.

**Remarque.** La valeur  $k - 1$  est optimale au sens où elle peut-être atteinte. Par exemple, pour une configuration « en épis » :



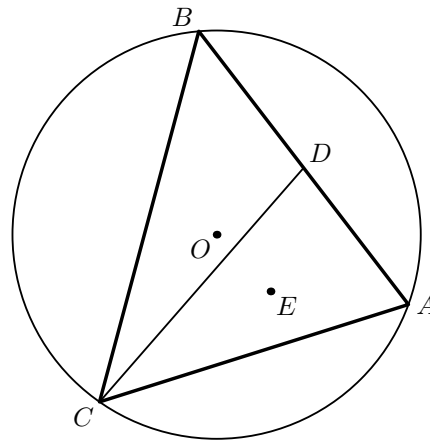
## Corrigé de l'envoi 2 — 2003 / 2004

### Problème 4 :

Soit  $O$  le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ , et  $D$  le milieu de  $[AB]$ . Soit  $E$  le centre de gravité de  $ACD$ . Prouver que la droite  $(CD)$  est perpendiculaire à  $(OE)$  si et seulement si  $AB = AC$ .

---

### Notre solution :



On a  $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ . Il vient donc :

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})$$

Par conséquent, les droites  $(CD)$  et  $(OE)$  sont perpendiculaires si et seulement si  $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} = 0$ , c'est-à-dire  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) \cdot (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) = 0$ .

En développant, et compte-tenu du fait que  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2$  (où  $R$  est le rayon du cercle circonscrit à  $ABC$ ), on en déduit que les droites  $(CD)$  et  $(OE)$  sont perpendiculaires si et seulement si  $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 0$ , soit  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ , ce qui revient à dire que  $(OA)$  est perpendiculaire à  $(BC)$ , ou encore que  $ABC$  est isocèle en  $A$ .

## Corrigé de l'envoi 2 — 2003 / 2004

### Problème 5 :

On fabrique un collier (fermé) à l'aide de  $n$  perles blanches et  $n$  perles noires disposées dans un ordre arbitraire. Toute suite de  $m$  perles consécutives est appelée une  $m$ -chaîne.

- (a) Prouver que pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , il existe une  $2k$ -chaîne contenant exactement  $k$  perles noires.
- (b) Prouver que si  $k \leq \sqrt{2n+2} - 2$  alors il existe même deux telles chaînes disjointes.

---

### Notre solution :

- (a) On considère que le collier est un cercle, et on numérote les positions des perles  $1, 2, \dots, 2n$  dans le sens direct à partir d'une origine arbitraire. Dans ce qui suit, les indices sont considérés modulo  $2n$ .

Pour chaque  $i$ , on pose  $a_i = 1$  si la perle numéro  $i$  est noire, et  $a_i = -1$  si elle est blanche.

Soit  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . On pose  $g(i) = \sum_{j=i}^{i+2k-1} a_j$ . Ainsi, il existe une  $2k$ -chaîne qui contient exactement  $k$  perles noires si et seulement s'il existe un indice  $i$  pour lequel  $g(i) = 0$ .

Notons que, puisqu'il y a autant de  $a_j$  égaux à 1 que de  $a_j$  égaux à  $-1$ , on a :

$$\sum_{i=1}^{2n} g(i) = 0 \tag{3}$$

D'autre part, pour chaque  $i$  on a  $g(i+1) - g(i) \in \{-2, 0, 2\}$ , et de plus, les  $g(i)$  sont tous pairs (\*).

- Si  $g(1) = 0$ , c'est fini.
- Si  $g(1) > 0$ , alors d'après (3), l'ensemble  $E = \{i / 1 \leq i \leq 2n \text{ et } g(i) < 0\}$  est non vide. Soit  $q$  son plus petit élément. On a donc  $q \geq 2$ ,  $g(q) < 0$  et  $g(q-1) \geq 0$ .  
Or, d'après (\*), comme  $g(q-1) > g(q)$  on a  $g(q-1) = g(q) + 2$ . Donc  $g(q) + 2 \geq 0$ , ce qui entraîne  $g(q) = -2$ , puisque  $g(q)$  est pair. Ainsi,  $g(q-1) = 0$ , et c'est encore terminé.
- Le cas  $g(1) < 0$  se traite de façon analogue.

Donc, dans tous les cas, il existe bien une  $2k$ -chaîne qui contient exactement  $k$  perles noires.

- (b) Soit  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  pour lequel il n'existe pas deux  $2k$ -chaînes disjointes contenant chacune  $k$  perles noires.

D'après (a), on sait qu'il existe au moins une telle  $2k$ -chaîne. Quitte à décaler la numérotation, on peut supposer que  $g(1) = 0$ . Dans ces conditions, on a  $g(2k+1), g(2k+2), \dots, g(2n)$  non nuls. Or, le raisonnement du (a) montre que si deux termes consécutifs  $g(i)$  et  $g(i+1)$  sont non nuls alors ils sont soit tous les deux strictement positifs, soit tous les deux strictement négatifs. Supposons qu'ils soient tous strictement négatifs (l'autre cas se traite de façon analogue), et donc  $g(2k+1), g(2k+2), \dots, g(2n)$  sont tous inférieurs ou égaux à  $-2$ . Par suite, d'après (3), on a :

$$g(1) + g(2) + \dots + g(2k) = -g(2k+1) - \dots - g(2n) \geq 2(2n - 2k) \tag{4}$$

D'un autre côté, d'après (\*), on a  $g(1) = 0$  donc  $g(2) \leq 2$ ,  $g(3) \leq 4$ ,  $\dots$ ,  $g(k) \leq 2k - 2$ . De même, puisque  $g(2k+1) \leq -2$ , on a  $g(2k) \leq 0$ ,  $g(2k-1) \leq 2$ ,  $\dots$ ,  $g(k+1) \leq 2k - 2$ . En sommant, il vient :

$$g(1) + g(2) + \dots + g(2k) \leq 2(0 + 2 + \dots + 2(k-1)) = 2k(k-1) \quad (5)$$

De (4) et (5), on déduit que, s'il n'existe pas deux  $2k$ -chaînes disjointes qui contiennent chacune  $k$  perles noires, alors  $2k(k-1) \geq 2(2n-2k)$ , c'est-à-dire  $(k+1/2)^2 \geq 2n+1/4$ , ou encore  $k \geq \sqrt{2n+1/4} - 1/2$ .

Par suite, si  $k < \sqrt{2n+1/4} - 1/2$  alors il existe bien deux  $2k$ -chaînes disjointes qui contiennent chacune  $k$  perles noires.

C'est cette dernière condition qui est la bonne, et qu'il aurait peut-être été plus judicieux de proposer, mais l'hypothèse de l'énoncé est en fait plus forte. Il suffit en effet de vérifier que  $\sqrt{2n+2} - 2 < \sqrt{2n+1/4} - 1/2$ . Et c'est bien le cas :

$$\begin{aligned} \sqrt{2n+2} - 2 < \sqrt{2n+1/4} - 1/2 &\iff \sqrt{2n+2} - \sqrt{2n+1/4} < \frac{3}{2} \\ &\iff \frac{7}{6} < \sqrt{2n+2} + \sqrt{2n+1/4} \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est clairement vraie pour  $n = 1$ , et le membre de droite est une fonction croissante en  $n$ , donc elle est vérifiée pour tout  $n \geq 1$ , ce qui conclut.

## Corrigé de l'envoi 2 — 2003 / 2004

### Problème 6 :

Soient  $k, n \geq 2$  des entiers. Prouver qu'au moins un des deux nombres  $n + k^n$  et  $n \cdot k^{k^n-1} + 1$  n'est pas premier.

---

### Notre solution :

Supposons par l'absurde que  $n, k \geq 2$  soient des entiers tels que  $n + k^n = p$  et  $nk^{k^n-1} + 1 = q$  soient tous les deux des nombres premiers. Alors  $n$  et  $k^n$  sont strictement compris entre 0 et  $p$ , et donc sont en particulier tous les deux premiers à  $p$ .

D'autre part, on a  $q - 1 = nk^{k^n-1} = nk^{p-n-1}$ , et donc  $k^n(q - 1) = nk^{p-1}$ , ou encore  $(p - n)(q - 1) = nk^{p-1}$ .

Or  $(p - n)(q - 1) \equiv n - nq \pmod{p}$  et, d'après le petit théorème de Fermat, on a  $nk^{p-1} \equiv n \pmod{p}$ . Par suite  $nq \equiv 0 \pmod{p}$ , ce qui, d'après le théorème de Gauss, entraîne que  $p$  divise  $q$ . Comme on a supposé que  $q$  est premier, c'est donc que  $q = p$ .

Cela conduit à  $n + k^n = nk^{k^n-1} + 1$ . Or, en regardant les deux membres, on peut prévoir que celui de droite a des chances d'être beaucoup plus grand que celui de gauche, et c'est ce que nous allons prouver maintenant.

Il est facile de vérifier par récurrence que, pour tout entier  $m \geq 2$ , on a  $2^m > m + 1$  (il suffit d'utiliser que  $2(m + 1) \geq m + 2$ ). Par suite, puisque  $n, k \geq 2$ , on a  $k^n - 1 \geq 2^n - 1 > n$ . Il en découle que  $n + k^n = nk^{k^n-1} + 1 > nk^n + 1$ , et donc que  $(n - 1)(k^n - 1) < 0$ , d'où la contradiction recherchée.